

frequency domain

Börge Julian Kroniger

30. Januar 2012

Inhaltsverzeichnis

- 1 Überblick
- 2 sinusförmige Signale und ihre Wichtigkeit
 - Technischer Hintergrund
 - Harmonielehre: Psychoakustik
- 3 Fourierreihe
 - Allgemeines
 - Fourierkoeffizienten
 - Konvergenz von Funktionenfolgen
 - anschaulicher Einschub
 - Beispiele
 - stückweise stetige Funktion mit gibbschem Phänomen
 - stetige Funktion
- 4 Fazit

Überblick/Ziele

Dienlichkeit von Signalen

- Signale sind vielfältigster Natur
- dienen zur Beschreibung unserer Umwelt
- Signale sind **Funktionen** (der Zeit) → **mathematischer Zugang**
- Signale sind unterschiedlich kompliziert: → mathematische Modellierung mit dem Ziel: **gute Handhabbarkeit bei zufriedenstellender Genauigkeit**

Wie sieht eine hinreichend gute Modellierung aus

→ Wichtigkeit sinusförmiger Signale

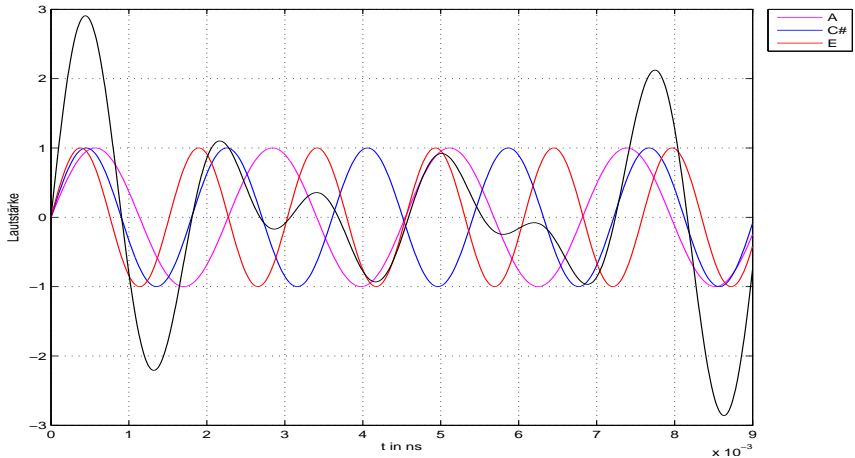
- einfach zu erzeugen
- gut benutzbar für Rechnungen
→ bei Übertragung durch LTI System wird Frequenz beibehalten
- → **Daher:** Vorteile dieses Signaltyps für die mathematische Synthese sämtlicher Signale nutzen!
- **Entscheidender Nachteil:** deterministisch → keine Informationsübertragung möglich
- Andere Herangehensweise: Psychoakustik

Harmonielehre aus der Musik

- sämtliche wahrnehmbaren Töne sind sinusförmiger Natur
- der Mensch nimmt periodische Schwingungen als Töne wahr
 - Grundton
 - harmonischen Oberschwingungen: gewichtete ganzzahlige Vielfache des Grundtons
- Klangfarbe eines Musikinstrumentes: physikalische Rahmenbedingungen
- Dreiklänge und andere Akkorde

→ Harmonielehre zeigt auch Wichtigkeit Sinusförmiger Signale

Bild eines Dur - Dreiklages



Allgemeines zur Fourierreihe: key facts

- **Motivation** der Menschen damals: periodische Signale durch harmonische Funktionen darstellen
- notwendige Bedingung für ihre Existenz: **Periodizität des Signals**
- Allgemeine Form einer Fourierreihe:

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_0 + 2 \cdot \sum_{n=1}^k |F_n| \cdot \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

oder die etwas bekanntere Darstellung:

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k a_n \cdot \cos(n\Omega t) + b_n \cdot \sin(n\Omega t)$$

- sämtliche Darstellungsformen identisch

Überblick: Fourierkoeffizienten

- hinreichende Bedingung: $f(t)$ ist *stückweise* stetig
- Berechnen der F_n :

$$F_n = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \exp(-jn\Omega t) dt = |F_n| \cdot e^{j\varphi_n}$$

mit $\Omega = \frac{2\pi}{T}$: Grundkreisfrequenz

- Was bewirken die Koeffizienten:
 - Gewichtung der jeweiligen Oberschwingung
- und das mit dem Ziel:
 - die Fourierreihe soll gegen die Funktion konvergieren!
 - Idee dahinter: *Konvergenz von Funktionenfolgen*

Konvergenz von Funktionenfolgen

- Wie kann man den „Abstand“ zweier Funktionen messen?
 - ① Folge $f_n(t)$ und Signal $f(t)$ sollen übereinstimmen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$$

→ **gleichmäßige Konvergenz**

→ Problem bei Messfehlern und Unstetigkeitsstellen

Daher:

- ② Leistungsdifferenz zwischen Folge $f_n(t)$ und Signal $f(t)$ soll gegen 0 gehen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(t) - f_n(t)\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t) - f_n(t)|^2 dt}$$

→ **Konvergenz im quadratischen Mittel**

Funktionen- und Vektorräume

- Vektorraum \mathbb{R}^2 mit Drehmatrix

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$



- jeder Punkt **eindeutig** erreichbar durch **endliche** Linearkombination der Basis
- Skalarprodukt zur
 - 1 Längenmessung

$$\text{Länge des Vektors } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

- 2 Abstandsmessung

$$\text{Abstand zwischen den Punkten P und Q: } d(\vec{p}, \vec{q}) = |\vec{p} - \vec{q}|$$

- im Besonderen gilt:
Skalarprodukt zweier **orthogonal** zueinander liegenden Vektoren ist 0

Funktionen- und Vektorräume

Nun:

→ Eigenschaften eines solchen Vektorraums auf einen
Funktionsraum übertragen

- Funktionsraum aller auf $[0, T]$ stückweise stetigen Funktionen
- Basis mit $\cos(n\Omega t), \sin(n\Omega t)$
- Definition eines Skalarproduktes:

$$|f \cdot g| := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot g(t) dt$$

→ Basis steht bzgl. dieses Skalarproduktes orthogonal zueinander

Abstandsmessung mit diesem Skalarprodukt

- 1 Längenmessung: (Norm einer Funktion)

$$\|f(t)\|_2 := \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2 dt}$$

- 2 Abstandsmessung zwischen f und g

$$d(f, g) = \|f - g\|_2 := \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f - g|^2 dt}$$

Abstandsmessung mit diesem Skalarprodukt

- ① Längenmessung: (Norm einer Funktion)

$$\|f(t)\|_2 := \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2 dt}$$

- ② Abstandsmessung zwischen f und g

$$d(f, g) = \|f - g\|_2 := \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f - g|^2 dt}$$

Vergleich mit Konvergenzkriterium:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(t) - f_n(t)\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t) - f_n(t)|^2 dt}$$

Abstandsmessung mit diesem Skalarprodukt

- ① Längenmessung: (Norm einer Funktion)

$$\|f(t)\|_2 := \sqrt{f \cdot f} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2 dt}$$

- ② Abstandsmessung zwischen f und g

$$d(f, g) = \|f - g\|_2 := \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f - g|^2 dt}$$

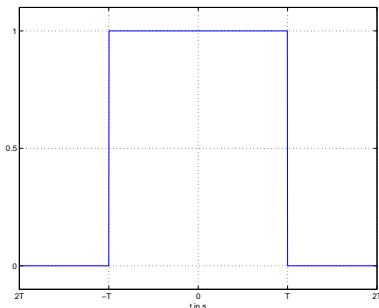
→ sind identisch!

→ Die F_n sind genauso bestimmt, dass **Skalarprodukt**
 $d(f, f_n)$ minimal wird! (Orthogonalitätsrelationen)

periodische Rechteckfunktion

- Rechteckfunktion

$$f(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } T := \text{halbe Impulsbreite}$$

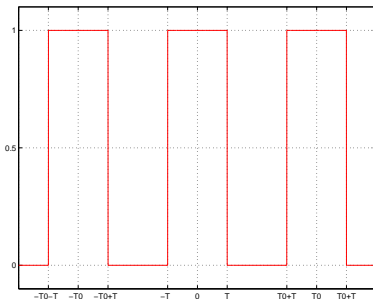


Rechteck

periodische Rechteckfunktion

- periodische Rechteckfunktion mit Periode T_0

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t + nT_0}{T}\right) \text{ mit } T < T_0, n \in \mathbb{Z}$$



periodische Rechteckfunktion

periodische Rechteckfunktion

- periodische Rechteckfunktion mit Periode T_0

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t + nT_0}{T}\right) \text{ mit } T < T_0, n \in \mathbb{Z}$$

- Berechnen der Koeffizienten:
 - Gleichanteil F_0

$$F_0 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T}^T 1 dt = \frac{2T}{T_0}$$

- Alle weiteren F_n

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cdot \exp(-jn\Omega t) dt = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-T}^T 1 \cdot \exp(-jn\Omega t) dt \\ &= \frac{1}{n\pi} \cdot \sin(n\Omega T) \end{aligned}$$

periodische Rechteckfunktion

- periodische Rechteckfunktion mit Periode T_0

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t + nT_0}{T}\right) \text{ mit } T < T_0, n \in \mathbb{Z}$$

führt dann auf folgende Fourierreihe:

$$f(t) = \frac{2T}{T_0} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(n\Omega T) \cdot \cos(n\Omega t)$$

Wir sehen:

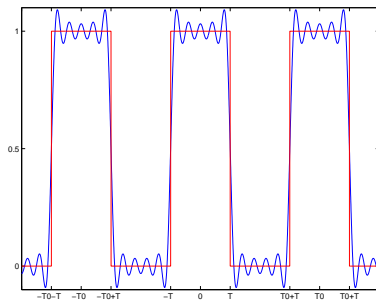
- $f(t)$ ist gerade \Leftrightarrow nur Kosinus - Anteile & $\varphi_n = 0$
- die F_n sind reell und bilden Nullfolge
- $f(t)$ ist unstetig \Leftrightarrow die F_n gehen mit $\frac{1}{n}$ gegen 0
→ Grund, weshalb Gibbsches Phänomen auftritt

periodische Rechteckfunktion

- periodische Rechteckfunktion mit Periode T_0

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t + nT_0}{T}\right) \text{ mit } T < T_0, n \in \mathbb{Z}$$

- Approximationen



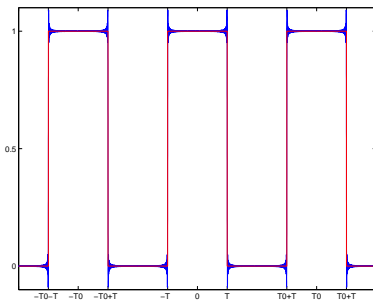
Approximation mit 10 Koeffizienten

periodische Rechteckfunktion

- periodische Rechteckfunktion mit Periode T_0

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t + nT_0}{T}\right) \text{ mit } T < T_0, n \in \mathbb{Z}$$

- Approximationen



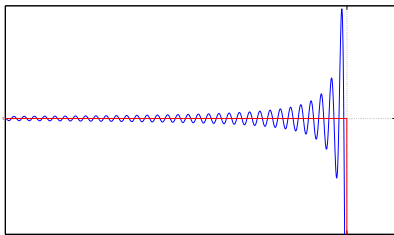
Approximation mit 250 Koeffizienten

periodische Rechteckfunktion

- periodische Rechteckfunktion mit Periode T_0

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t + nT_0}{T}\right) \text{ mit } T < T_0, n \in \mathbb{Z}$$

- Approximationen

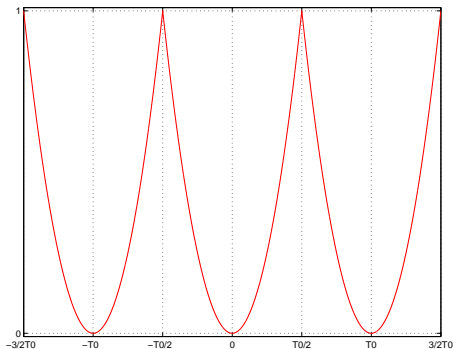


gibbsches Phänomen

periodische Parabel

- T_0 periodische Parabel

$$f(t) = t^2, T_0\text{-periodisch fortgesetzt}$$



periodische Parabel

periodische Parabel

- T_0 periodische Parabel

$$f(t) = t^2, T_0\text{-periodisch fortgesetzt}$$

- Berechnen der Koeffizienten:
 - Gleichanteil F_0

$$F_0 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) dt = \frac{T_0^2}{12}$$

- Alle weiteren F_n

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} t^2 \cdot \exp(-jn\Omega t) dt \\ &= \frac{2 \cdot (-1)^n}{n^2 \Omega^2} \end{aligned}$$

periodische Parabel

- T_0 periodische Parabel

$$f(t) = t^2, T_0\text{-periodisch fortgesetzt}$$

führt dann auf folgende Fourierreihe:

$$f(t) = \frac{T_0^2}{12} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n}{n^2 \Omega^2} \cdot \cos(n\Omega t)$$

Wir sehen:

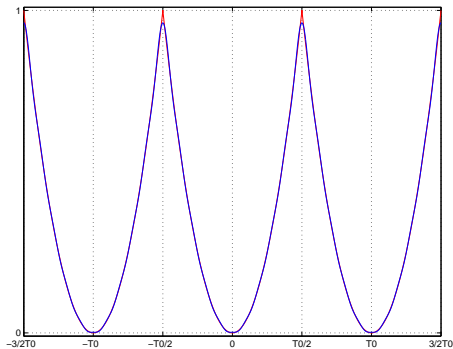
- $f(t)$ ist gerade \Leftrightarrow nur Kosinus - Anteile & $\varphi_n = 0$
- die F_n sind reell, bilden Nullfolge und konvergieren absolut \Leftrightarrow kein Gibbsches Phänomen
- $f(t)$ ist stetig auf \mathbb{R} \Leftrightarrow die F_n gehen mit $\frac{1}{n^2}$ gegen 0
- Zudem: Leibnizreihe

periodische Parabel

- T_0 periodische Parabel

$$f(t) = t^2, T_0\text{-periodisch fortgesetzt}$$

- Approximationen



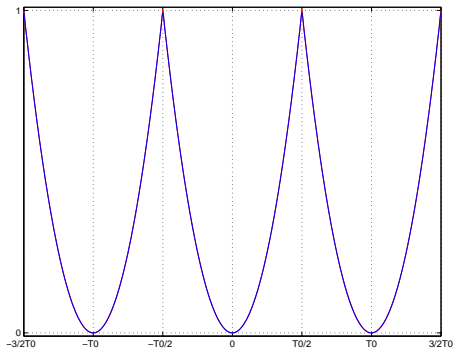
Approximation mit 10 Koeffizienten

periodische Parabel

- T_0 periodische Parabel

$$f(t) = t^2, T_0\text{-periodisch fortgesetzt}$$

- Approximationen



Approximation mit 50 Koeffizienten

Fazit

- Wichtigkeit sinusförmiger Signale
- Fourierreihe konvergiert gleichmäßig $\Leftrightarrow f(t)$ stetig
- Approximation & Vektorräume
- F_n bilden Nullfolge
- an Unstetigkeitsstellen gibbsches Phänomen