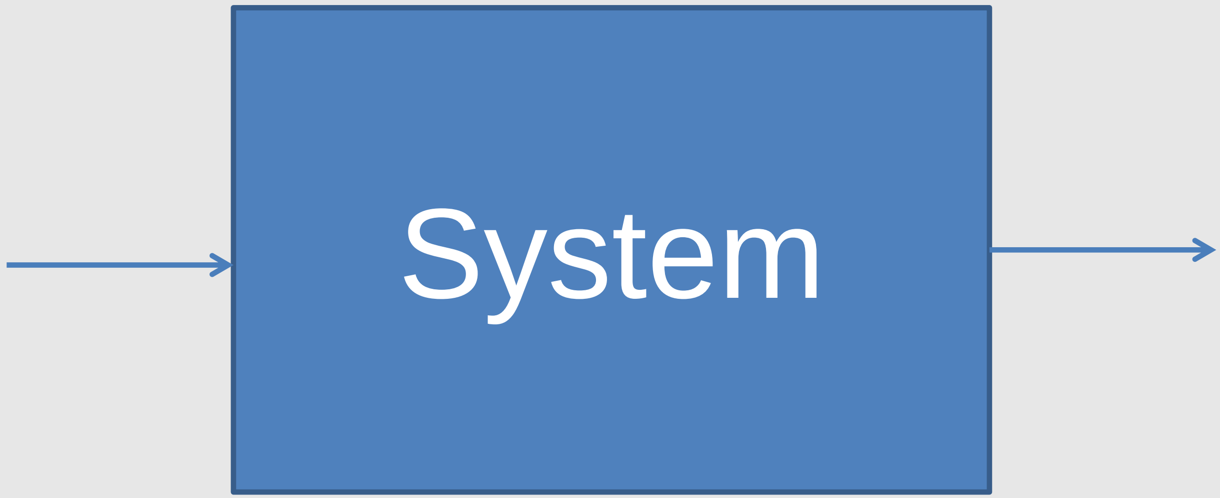
LINEARE SYSTEME

Motivation

Automaten (Ergänzung)

- Bisher: endliche Automaten (finite state machines)
- Jetzt: unendliche Automaten (infinite state machines)
- Bisher: ereignisdiskrete Systeme
- Jetzt: zeitdiskrete Systeme
- M = (States; Inputs;Outputs;update; initialState)

SISO-System



M Eingänge
x(n)

N-dimensionale
Zustände
s(n)

K Ausgänge
y(n)

MIMO-SYSTEM

M Eingänge
x(n)

N-dimensionale
Zustände
s(n)

K Ausgänge
y(n)

LINEARITÄT

- Homogenität
  - $f(au)=af(u)$
- Additivität
  - $f(u+v)=f(u)+f(v)$
- linear ≠ affin

- Superpositions-eigenschaft
  - $f(au+bv)=af(u)+bf(v)$

ZUSTANDSRAUMMODELL

- y=Ax ist linear
- s(n+1)=nextState(s(n),x(n))
- Für LTI-Systeme:

  nextState(s(n),x(n)) = As(n)+Bx(n)

ZUSTANDSRAUMMODELL

$$s(n+1) = As(n)+Bx(n)$$

- A ist eine N×N-Matrix für Systeme der Dimension N
- B ist eine N×M-Matrix für Systeme mit M Eingängen

ZUSTANDSRAUMMODELL

- output(s(n),x(n)) = Cs(n)+Dx(n)

$$y(n) = Cs(n)+Dx(n)$$

- C ist eine K×N-Matrix für System mit K Ausgängen

Beispiel: gleitender Mittelwert

- Länge sei 4
- $y(n) = \frac{1}{4}[x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)]$
- Nur x(n) liegt am System an
- 3 ältere Werte müssen also gespeichert werden
  ➔ Dimension des Systems ist 3
- Es handelt sich um ein SISO-System
- $s(n) = \begin{bmatrix} x(n-1) \\ x(n-2) \\ x(n-3) \end{bmatrix}$

- $y(n) = \frac{1}{4}[x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)]$

- $s(n) = \begin{bmatrix} x(n-1) \\ x(n-2) \\ x(n-3) \end{bmatrix}$

- $s(n+1) = \begin{bmatrix} \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n-1) \\ x(n-2) \\ x(n-3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \_ \\ \_ \\ \_ \end{bmatrix} x(n)$

- $y(n) = \begin{bmatrix} \_ & \_ & \_ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n-1) \\ x(n-2) \\ x(n-3) \end{bmatrix} + \_ \; x(n)$

- $y(n) = \frac{1}{4}[x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)]$
- $s(n) = \begin{bmatrix} x(n-1) \\ x(n-2) \\ x(n-3) \end{bmatrix}$
- $s(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n-1) \\ x(n-2) \\ x(n-3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x(n)$
- $y(n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n-1) \\ x(n-2) \\ x(n-3) \end{bmatrix} + \frac{1}{4} x(n)$

ZRM FÜR MIMO-SYSTEME

- $f(au+bv)=af(u)+bf(v)$
- Ein MIMO-System kann in M*K SISO-Systeme zerlegt werden
- In den SISO-Systemen wird nur je ein Ein- und ein Ausgang betrachtet
- Kumuliert man alle SISO-Systeme, so erhält man das MIMO-System

IMPULSANTWORT

- Analyse eines Systems ist möglich, indem man die Reaktion auf einen Impuls (Kronecker Delta) am Eingang betrachtet
- Für $s_0=0$:

$s(0)=0$	$h(0)=D$
$s(1)=B$	$h(1)=CB$
$s(2)=AB$	$h(2)=CAB$
$s(3)=A^2B$	$h(3)=CA^2B$
$s(n)=A^{n-1}B$	$h(n)= CA^{n-1}B$

$$\boxed{h(n) = \begin{cases} 0 \text{ für } n < 0 \\ D \text{ für } n = 0 \\ CA^{n-1}B \text{ für } n > 0 \end{cases}}$$

IMPULSANTWORT

- Um den Ausgang eines Systems aus dem Eingang zu erhalten, gilt für s_0=0:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n-1} \{CA^{n-1-m} Bx(m)\} + Dx(n)$$

$$y(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(n-m)x(m) \qquad h(n) = \begin{cases} 0 \text{ für } n < 0 \\ D \text{ für } n = 0 \\ CA^{n-1}B \text{ für } n > 0 \end{cases}$$

$y = h * x$ (Faltung)

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

QUELLE

- E. A. Lee and P. Varaiya, Structure and Interpretation of Signals and Systems, Second Edition, LeeVaraiya.org, 2011