RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

RUB

Bachelor-Vertiefungsseminar

Die vier Fourier-Transformationen

Waldemar Schulz

Bochum, 30. Januar 2012

Gliederung

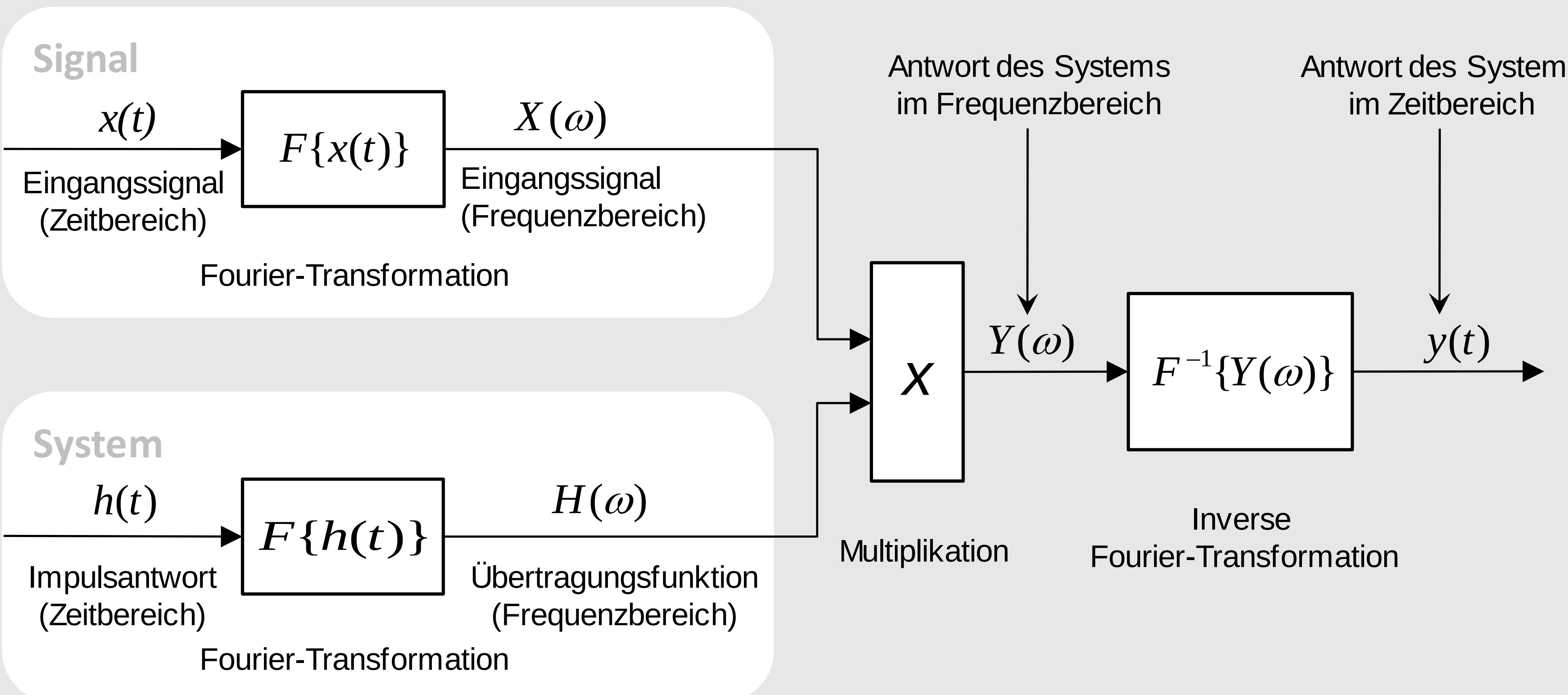
- Motivation
- Fourier-Transformationen
  - Fourier-Reihe (FS)
  - Diskrete Fourier-Transformation (DFT)
  - Zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT)
  - Zeitkontinuierliche Fourier-Transformation (CTFT)
- Eigenschaften der Fourier-Transformationen
- Zusammenfassung

Was ist Fourier-Transformation?

- Berechnung der Systemantwort durch Faltung im Zeitbereich oft aufwändig
- Umgehen der Faltung durch Berechnung der Systemantwort im Frequenzbereich

- Fourier-Transformation (FT) bzw. inverse FT beschreibt die Umwandlung von Signalen oder Systemen aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich und umgekehrt

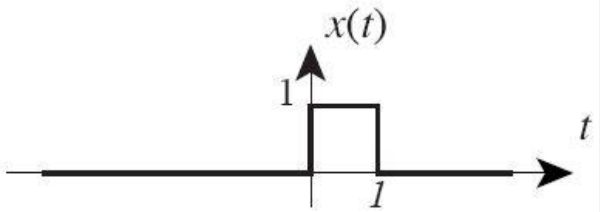
Berechnung einer Antwort eines Systems mit Hilfe der Fourier-Transformation



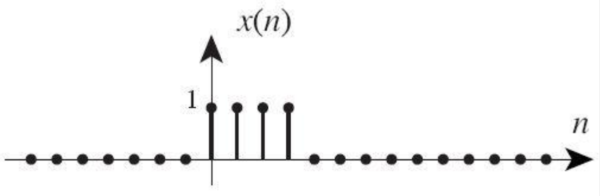
Notation

Für unterschiedliche Signale verschiedene Fourier-Transformationen

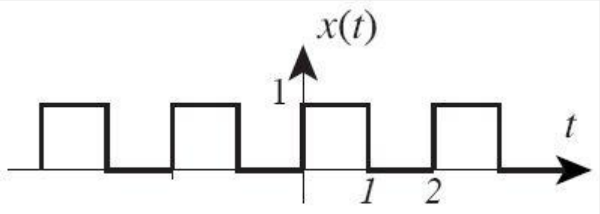
- zeitkontinuierliche, nichtperiodische Signale
  $\rightarrow$ *KontSignale*



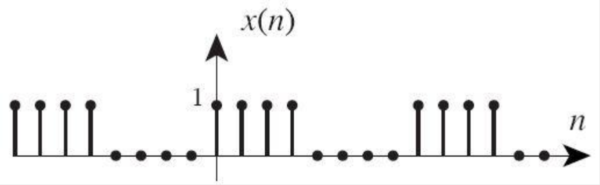
- zeitdiskrete, nichtperiodische Signale
  $\rightarrow$ *DiskSignale*



- zeitkontinuierliche, periodische Signale
  $\rightarrow$ *KontPeriodisch*$_p \subset$ *KontSignale*



- zeitdiskrete, periodische Signale
  $\rightarrow$ Disk*Periodisch*$_p \subset$ *DiskSignale*



Fourier-Transformationen
Fourier-Reihe

- Gültig für zeitkontinuierliche, periodische Signale: $x \in KontPeriodisch$
- Periodisches Signal als Summe komplexer Exponentialfunktionen

Fourier-Reihe: $$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m e^{im\omega_0 t} \quad ,\forall t \in \mathbb{R}$$

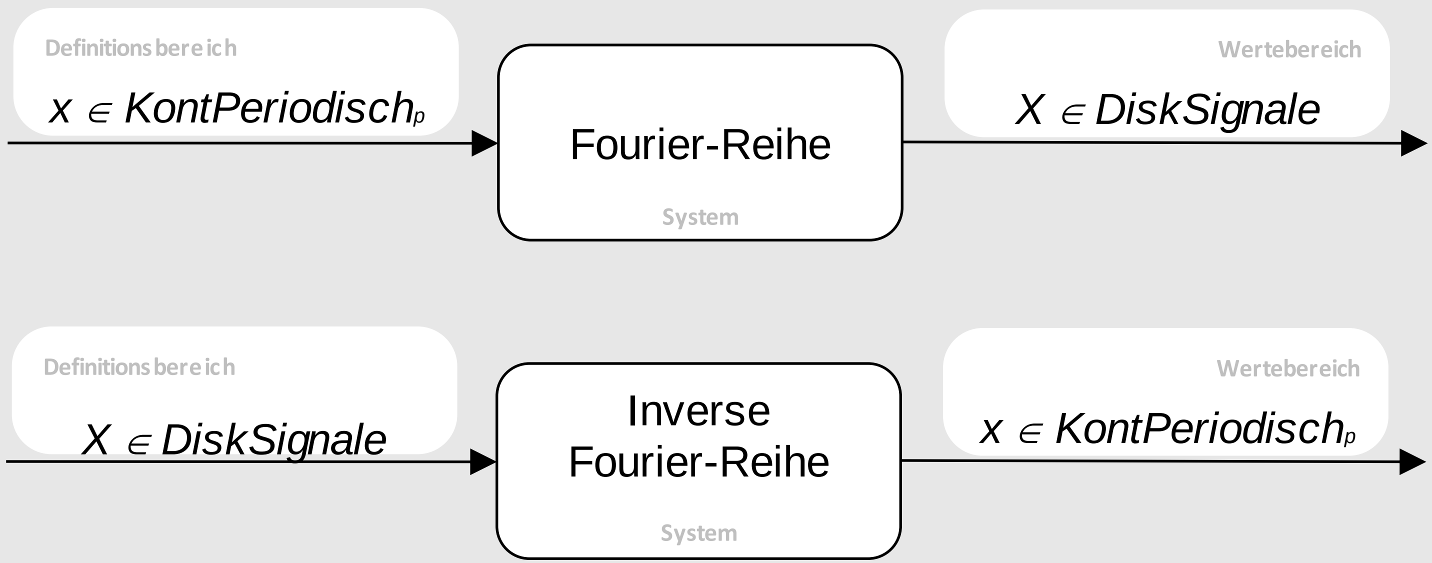
Grundkreisfrequenz: $$\omega_0 = \frac{2\pi}{p}$$

Fourier-Koeffizienten: $$X_m = \frac{1}{p}\int_0^p x(t)e^{-im\omega_0 t}dt, \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

- Folgen der Fourier-Koeffizienten: $X \in DiskSignale$

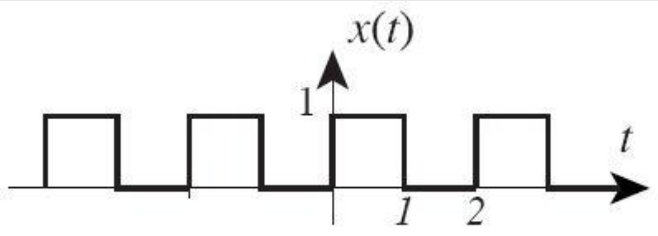
Fourier-Transformationen
Fourier-Reihe

erste von vier Formen der Fourier-Transformation



- Inverse Fourier-Reihe der Fourier-Reihe von $x(t)$ ist wiederrum $x(t)$
- Fourier-Reihe der Inversen Fourier-Reihe von $X(\omega)$ ist wiederrum $X(\omega)$

Fourier-Transformationen
Fourier-Reihe: Beispiel



Periodische zeitkontinuierliche Funktion

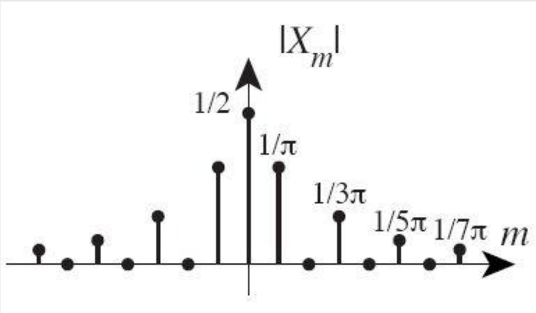
$$X_m = \frac{1}{2}\int_0^2 x(t)e^{-im\pi t}dt \qquad p = 2, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-im\pi t}dt$$

$$\boxed{m = 0} \quad X_0 = \frac{1}{2}, \quad da \quad e^0 = 1$$

$$\boxed{m \neq 0} \quad X_m = \frac{-1}{2im\pi}\int_0^1 e^{-im\pi t}(-im\pi)dt = \frac{i}{2m\pi}(e^{-im\pi} - 1)$$

$$X_m = \begin{cases} 0 \;, wenn \;\; m \;\; gerade \\ \dfrac{-i}{m\pi}, wenn \;\; m \;\; ungerade \end{cases}$$



Zeitdiskrete Funktion

Fourier-Transformationen

Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

- Erweiterung der Fourier-Reihe
- Gültig für zeitdiskrete, periodische Signale: $x \in$ *DiskPeriodisch*
- Summe komplexer Exponentialfunktionen

Diskrete FT: $$x(n) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} X'_k \, e^{ik\omega_0 n} \qquad , \forall n \in \mathbb{Z}$$

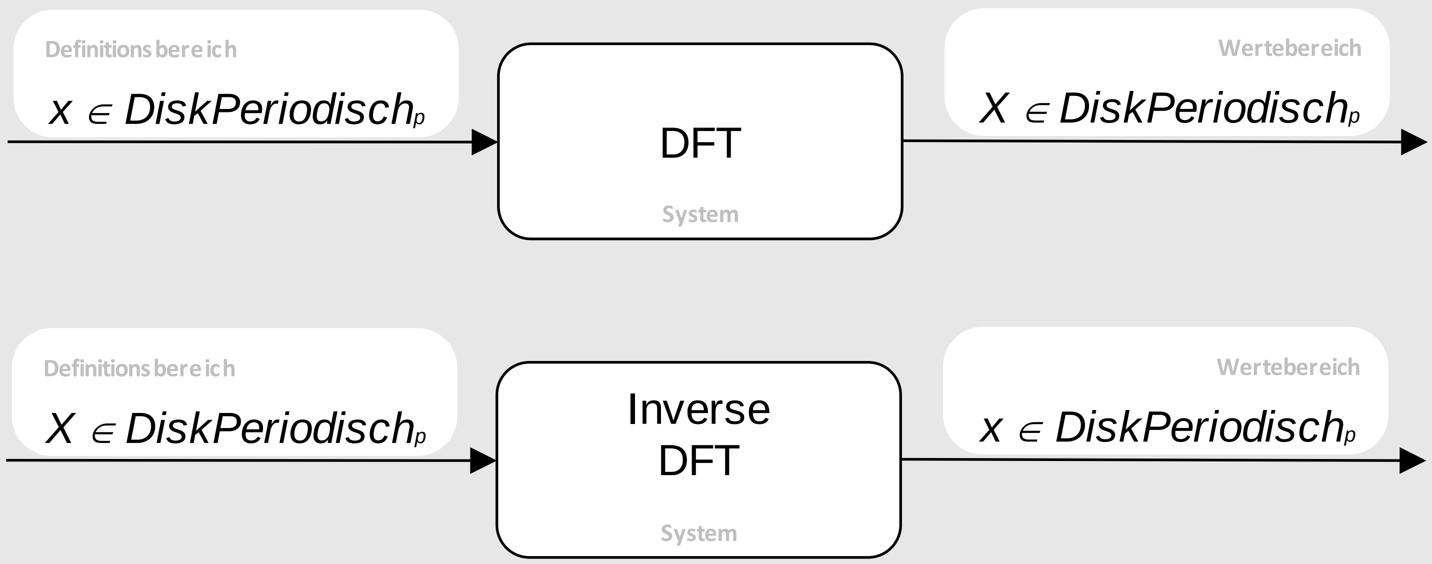
Grundkreisfrequenz: $$\omega_0 = \frac{2\pi}{p} \qquad , \omega_0 \text{ normiert}$$

Fourier-Koeffizienten: $$X'_k = \sum_{m=0}^{p-1} x(m) e^{-imk\omega_0} \qquad , \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Folgen der Fourier-Koeffizienten: $X \in$ *DiskPeriodisch*

Fourier-Transformationen
Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

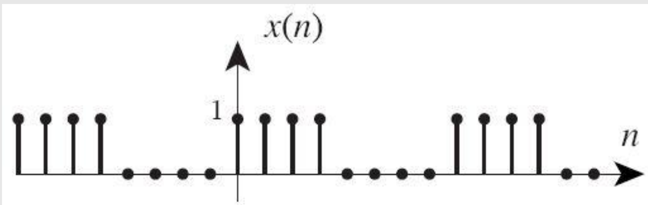
zweite von vier Formen der Fourier-Transformation



- Nützlichste Form der FT für Computerberechnungen (FFT), da leicht implementierbar
- beide Summen endlich
  $\rightarrow$ DFT existiert immer, keine Probleme mit Konvergenz
- Speziell, da Funktionen im Zeit- sowie im Frequenzbereich, Fourier-Reihen und periodisch

Fourier-Transformationen

Diskrete Fourier-Transformation (DFT): Beispiel



periodische zeitdiskrete Funktion

$$X'_k = \sum_{n=0}^{7} x(n) e^{-ink\omega_0} \qquad p = 8,\ \ \omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

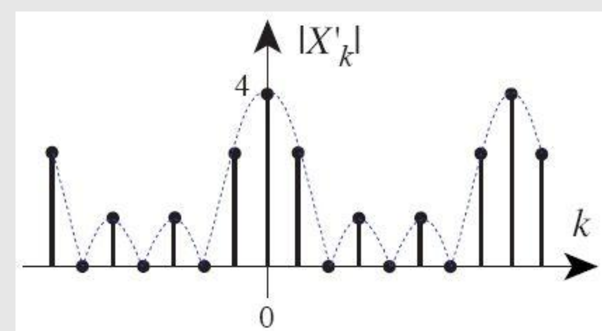
$$= \sum_{n=0}^{3} e^{-ink\,\pi/4} \qquad (\omega_0\ normiert)$$

$\boxed{k = 0}$ $\quad X'_0 = 4, \quad da \quad e^0 = 1$

$\boxed{k = 8m}$ $\quad X'_k = 4, \quad m = 1,2,3\ldots \quad da \quad DFT \quad periodisch \quad mit \quad p = 8$

$\boxed{k \neq 0,\ k \neq 8m}$ $\quad X'_k = \dfrac{1-e^{-ik\pi}}{1-e^{-ik\,\pi/4}} \quad , mit \quad \boxed{\sum_{n=0}^{N} a^n = \dfrac{1-a^{N+1}}{1-a} \quad , N = 3,\ a = e^{-ik\pi/4}}$

$$1 - e^{ik\pi} = \begin{cases} 0 & , wenn \quad k \quad gerade \\ 2 & , wenn \quad k \quad ungerade \end{cases}$$



periodische zeitdiskrete Funktion

Fourier-Transformationen

Zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT)

- Übertragungsfunktion *H* eines LTI-Systems steht im Bezug zur Impulsantwort *h mit:* $H(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-i\omega m} \quad , \forall \omega \in \mathbb{R} \;, \omega \text{ normiert}$
- *H* ist zeitdiskrete Fourier-Transformation von *h*
- Gültig nicht nur für *h* sondern für alle zeitdiskrete, nichtperiodische Signale: $x \in$ *DiskSignale*

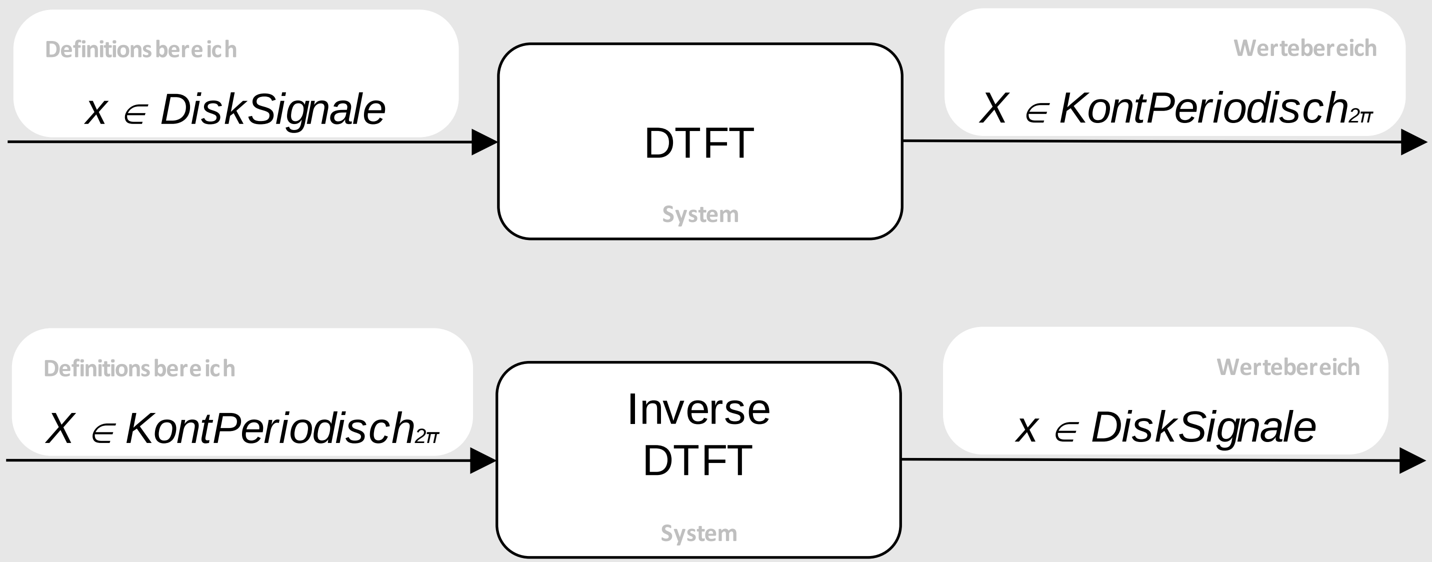
zeitdiskrete Fourier-Transformation: $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n} \quad , \forall \omega \in \mathbb{R}$

2π-periodisch: $X(\omega) = X(\omega + 2\pi) \quad , \forall \omega \in \mathbb{R}$ $\qquad e^{-i\omega t} = e^{-i(\omega + 2\pi)t}$

- transformierte Eingangssignale: $X \in KontPeriodisch$

Fourier-Transformationen
Zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT)

dritte von vier Formen der Fourier-Transformation

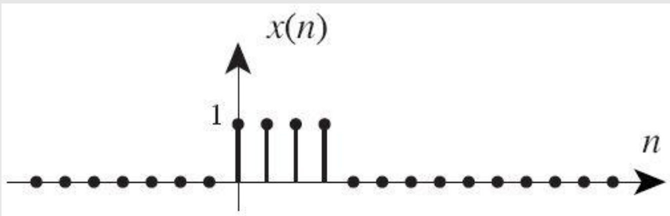


- ähnliche Struktur wie DFT

Inverse DTFT:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\omega) e^{i\omega n}\, d\omega, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Fourier-Transformationen
Zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT): Beispiel



nichtperiodische zeitdiskrete Funktion

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-i\omega n} \quad , \omega \text{ normiert}$$

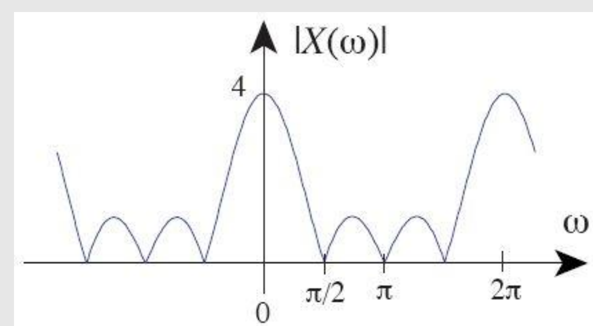
$$= \sum_{n=0}^{3} e^{-i\omega n}$$

$$\boxed{\omega = 0} \qquad X(0) = 4, \quad da \quad e^{0} = 1$$

$$\boxed{\omega = 2\pi m} \qquad X(\omega) = 4, \quad m = 1,2,3\ldots \quad da \quad DTFT \quad periodisch \quad mit \quad 2\pi$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega \neq 0, \\ \omega \neq 2\pi m \end{array}} \qquad X(\omega) = \frac{1 - e^{-i4\omega}}{1 - e^{-i\omega}}$$

$$mit \quad \boxed{\sum_{m=0}^{N} a^{m} = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a} \quad , N = 3, \; a = e^{-i\omega}}$$



periodische zeitkontinuierliche Funktion

Zeitkontinuierliche Fourier-Transformation (CTFT)

- Zusammenhang der Übertragungsfunktion und Impulsantwort eines zeitkontinuierlichen LTI-Systems durch die CTFT

- kann für beliebige Funktion $x \in KontSignale$ definiert werden

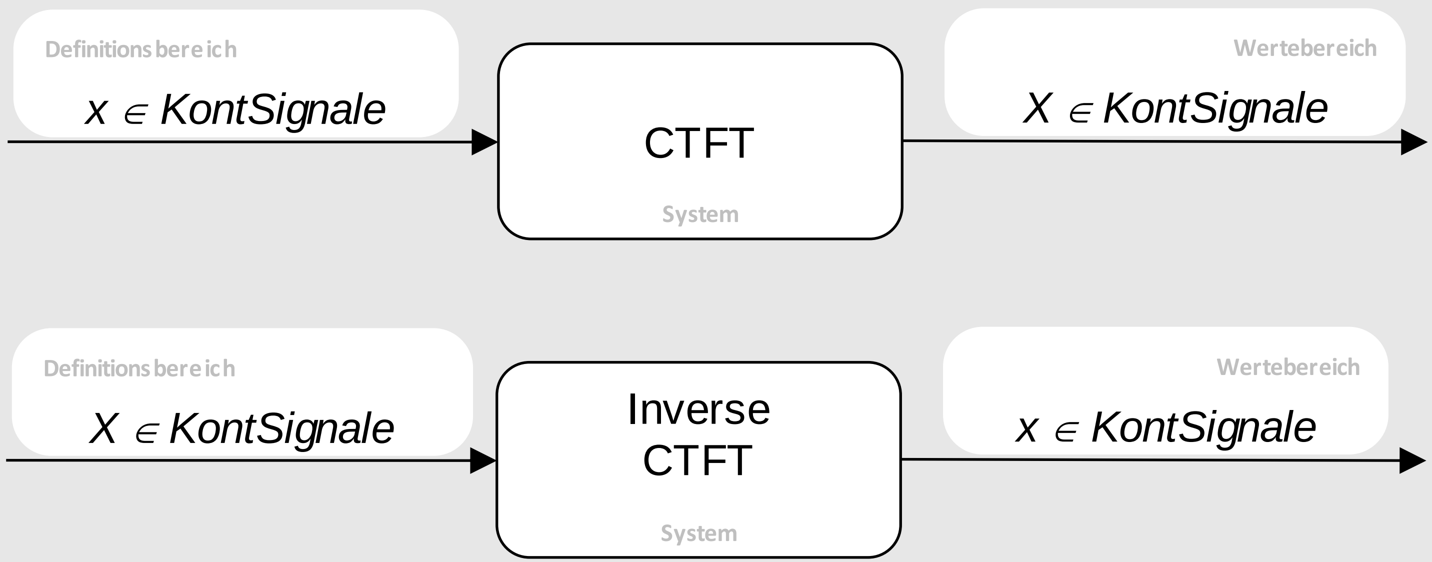
Fourier-Transformation: $$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad , \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Inverse Fourier-Transformation: $$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad , \forall t \in \mathbb{R}$$

- Fourier-Transformiertes Eingangssignal: $X \in KontSignale$

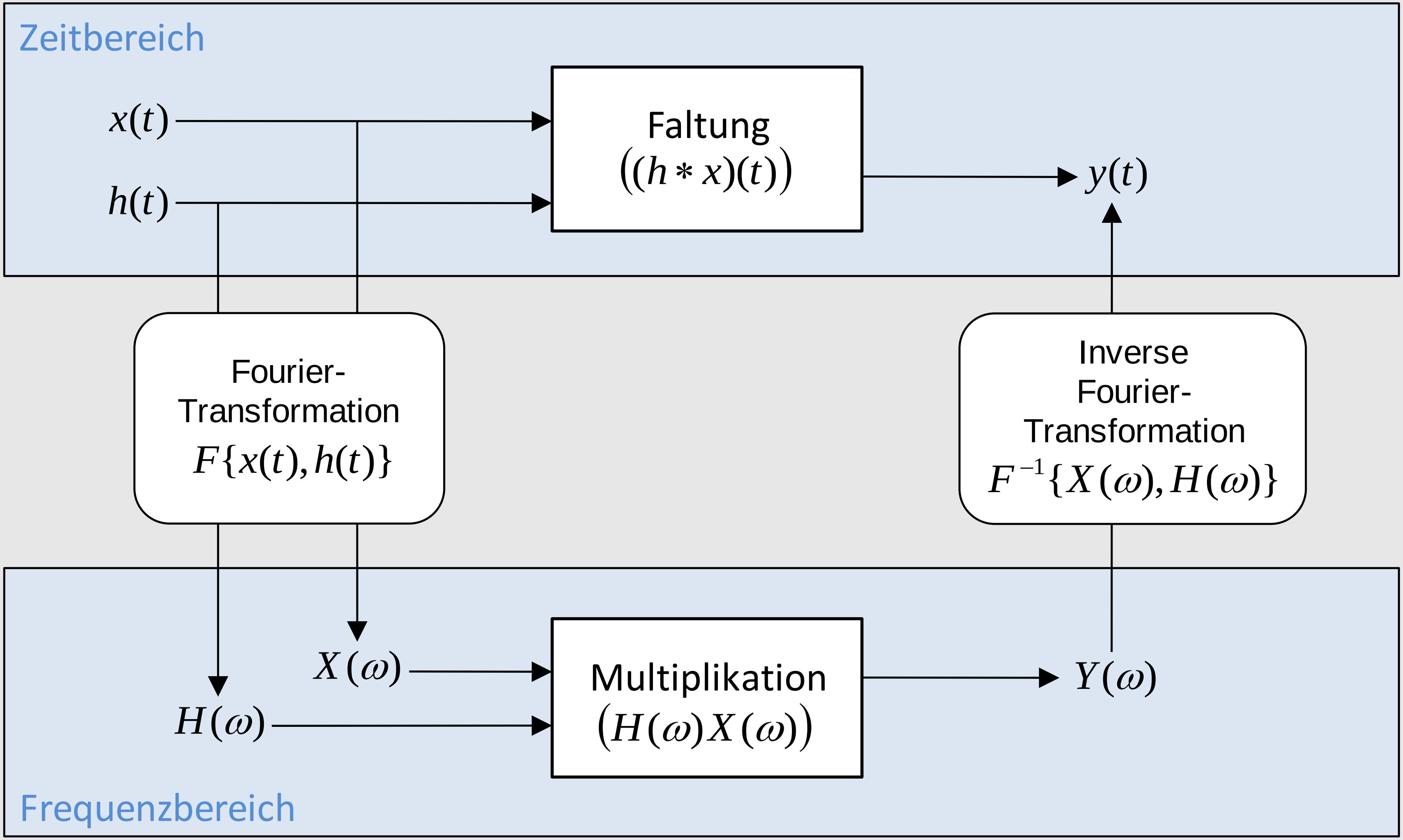
Fourier-Transformationen
Zeitkontinuierliche Fourier-Transformation (CTFT)

vierte von vier Formen der Fourier-Transformation



- allgemeinste Form der Fourier-Transformationen
- weder im Zeitbereich noch im Frequenzbereich müssen Funktionen periodisch oder diskret sein

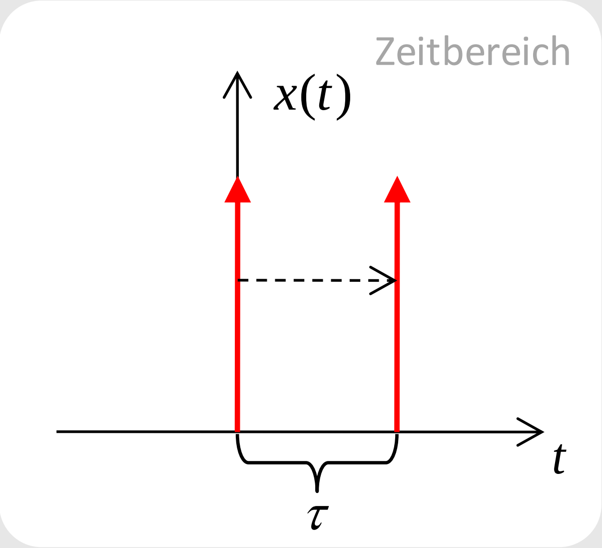
Eigenschaften von Fourier-Transformationen
Faltung



Eigenschaften von Fourier-Transformationen
Zeitverschiebung

- Verschiebung um τ im Zeitbereich wird im Frequenzbereich durch eine Multiplikation mit $e^{-i\omega\tau}$ beschrieben.

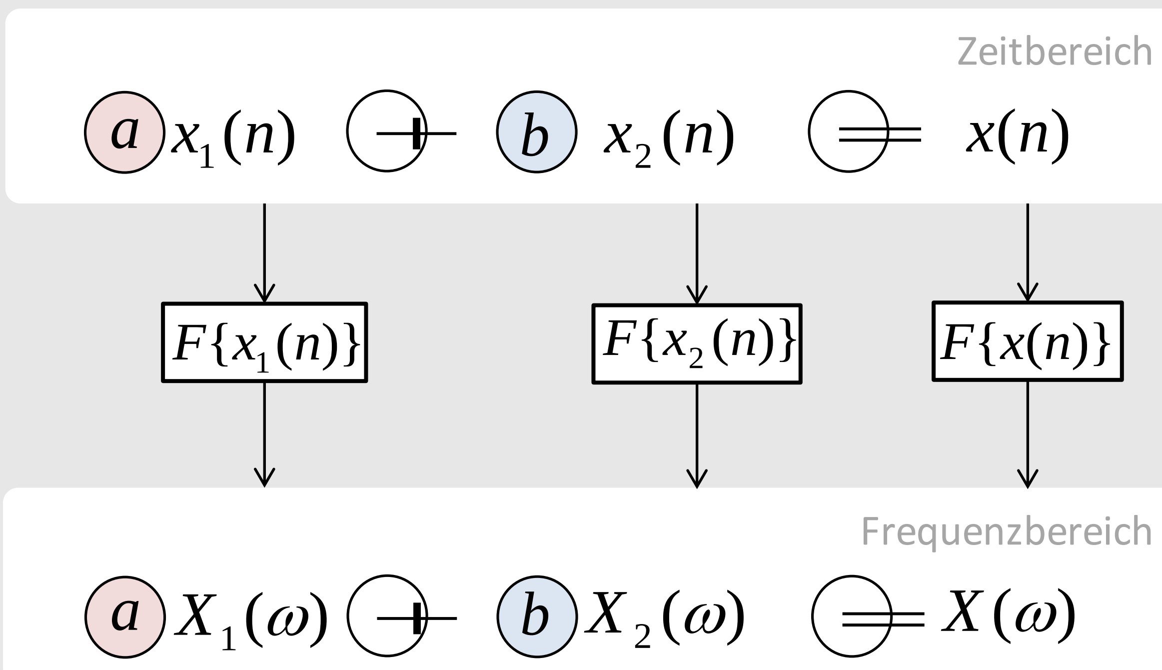
$$y(t) = x(t-\tau) \Leftrightarrow Y(\omega) = e^{-i\omega\tau} X(\omega)$$



Eigenschaften von Fourier-Transformationen

Linearität

- wird eine Funktion mit einer Konstanten multipliziert, so wird auch ihr Spektrum mit dieser Konstanten multipliziert



- eine der wichtigsten Eigenschaften

Eigenschaften von Fourier-Transformationen

Konstante Signale

- FT der Delta-Funktion ist eine Konstante
- Durch Symmetrie: FT einer Konstante ist die Delta-Funktion

Für den kontinuierlichen Fall:

$$x(t) = K \Leftrightarrow X(\omega) = 2\pi K \delta(\omega)$$

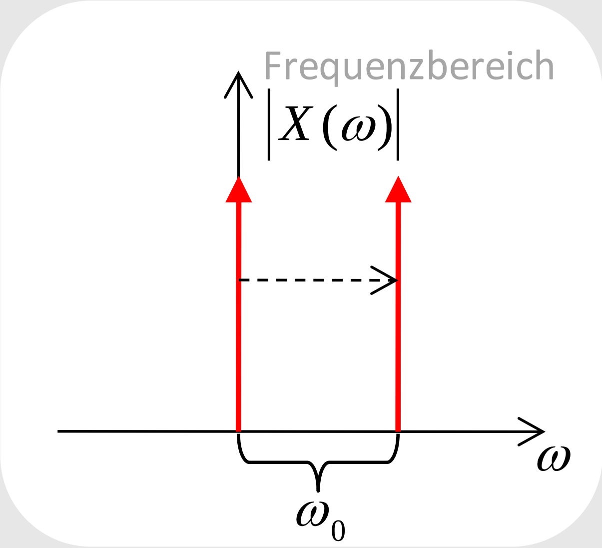
Analog für den diskreten Fall:

$$x(n) = K \Leftrightarrow X(\omega) = 2\pi K \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k2\pi)$$

Eigenschaften von Fourier-Transformationen
Frequenzverschiebung / Modulation

- Zeitverschiebung um τ realisiert durch Multiplikation mit $e^{-i\omega\tau}$ im Frequenzbereich
- Verschiebung der Fourier-Transformierten im Frequenzbereich um ω_0 wird durch Multiplikation mit $e^{-i\omega_0 t}$ im Zeitbereich beschrieben.

$$y(t) = x(t)e^{-i\omega_0\tau} \Leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega - \omega_0)$$



- Modulation: Multiplikation mit Sinus-Signal im Zeitbereich

Zusammenfassung

	nichtperiodisch	periodisch
zeitkontinuierlich	Fourier-Transformation (**CTFT**)	Fourier-Reihe (**FS**)
zeitdiskret	Zeitdiskrete Fourier-Transformation (**DTFT**)	Diskrete Fourier-Transformation (**DFT**)

- für jede Signalart eine geeignete Fourier-Transformation
- Eigenschaften werden genutzt, um kompliziertere Signale mit Hilfe einer Analyse der einfacheren Signale zu analysieren.