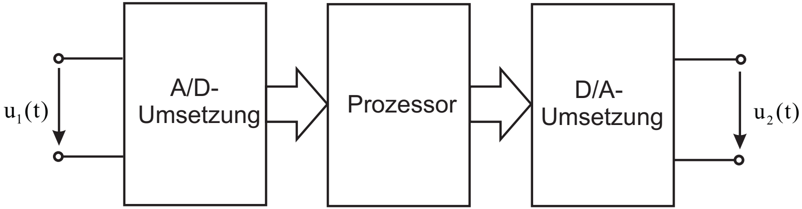
Abtastung und Rekonstruktion

Silvia Soub

30. Januar 2012

Gliederung

Prinzip der digitalen Signalverarbeitung



Vorteile der digitalen Signalverarbeitung

1. Flexibilität
2. geringe Kosten

Vorteile der digitalen Signalverarbeitung

1. Flexibilität
2. geringe Kosten
3. idealisierte Modelle möglich

Vorteile der digitalen Signalverarbeitung

1. Flexibilität
2. geringe Kosten
3. idealisierte Modelle möglich
4. Speicherung möglich

Vorteile der digitalen Signalverarbeitung

1. Flexibilität
2. geringe Kosten
3. idealisierte Modelle möglich
4. Speicherung möglich
5. einfache Fehlerkorrektur

Vorteile der digitalen Signalverarbeitung

1. Flexibilität
2. geringe Kosten
3. idealisierte Modelle möglich
4. Speicherung möglich
5. einfache Fehlerkorrektur

Abtastung

$$[x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}] \longrightarrow \boxed{Sampler_T} \longrightarrow [y : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}]$$

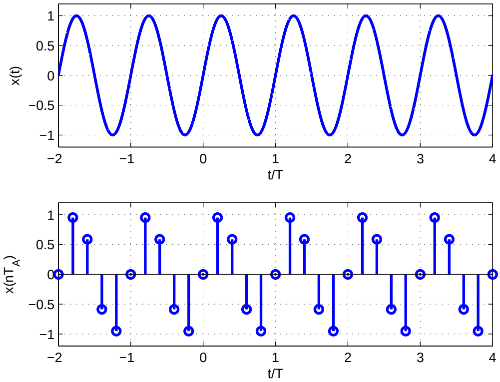
$$y[n] = x(nT), \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Abtastperiode} \quad \mathrm{T}$$

$$\text{Abtastrate} \quad \frac{1}{\mathrm{T}} = \mathrm{F}$$

- man erhält ein zeitdiskretes Signal
- Aufnahme von Werten zu den Zeitpunkten nT

Beispiel
Abtastung eines Sinussignals:



$$f = \frac{1}{T}$$

$$F = \frac{5}{T} = 5f$$

Aliasing

$$x(t) = cos(2\pi ft) \xrightarrow{y=Sampler_T(x)} \boxed{y[n] = cos(2\pi fnT)}$$

$$u(t) = cos(2\pi(f + NF)t) \xrightarrow{w=Sampler_T(u)} w[n]$$

$$= cos(2\pi(f + NF)nT)$$

$$= cos(2\pi fnT + 2\pi Nn)$$

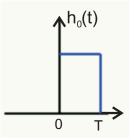
$$= \boxed{cos(2\pi fnT) = y[n]}$$

Rekonstruktion

$$\xrightarrow{y:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}} \boxed{Impulsgenerator} \xrightarrow{w:\mathbb{R}\to\mathbb{C}} \boxed{LTI - System} \xrightarrow{x:\mathbb{R}\to\mathbb{C}}$$

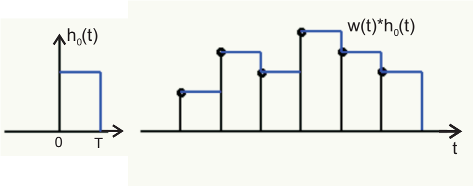
- Impulsgenerator produziert Dirac-Impulse in Höhe der Abtastwerte
- Impulsantwort des LTI-Systems gibt die Rekonstruktionsmethode wieder

Interpolation 0.Ordnung



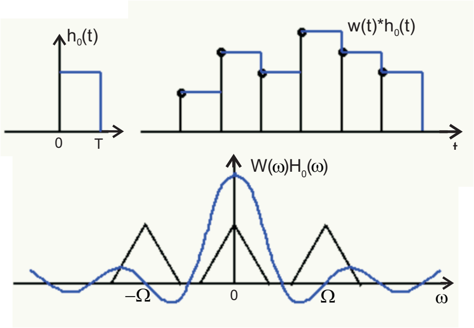
- Interpolation mit Rechteckfunktion $h_0(t) = rect(t)$

Interpolation 0.Ordnung



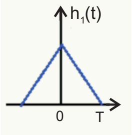
- der Wert der einzelnen Abtastwerte wird bis zum nächsten Abtastwert gehalten

Interpolation 0.Ordnung



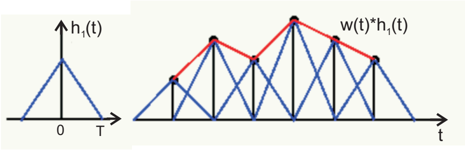
- Tiefpassfilterung mit Si-Funktion

Lineare Interpolation



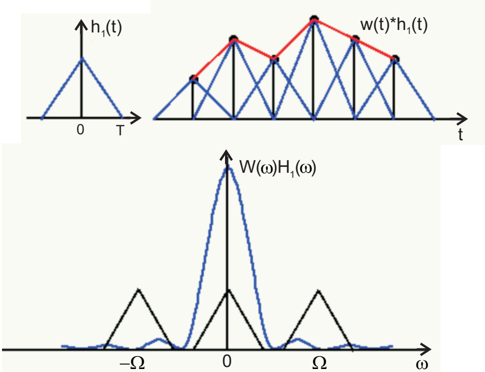
- Interpolation mit Dreicksfunktion $h_1 = tri(t)$

Lineare Interpolation



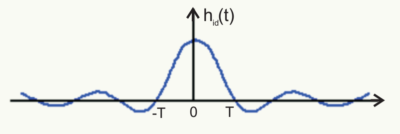
- Abtastwerte werden linear verbunden

Lineare Interpolation



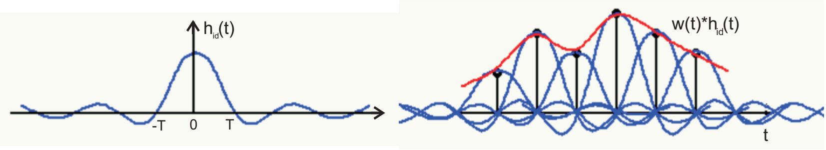
- Tiefpassfilterung mit si^2-Funktion

Ideale Interpolation



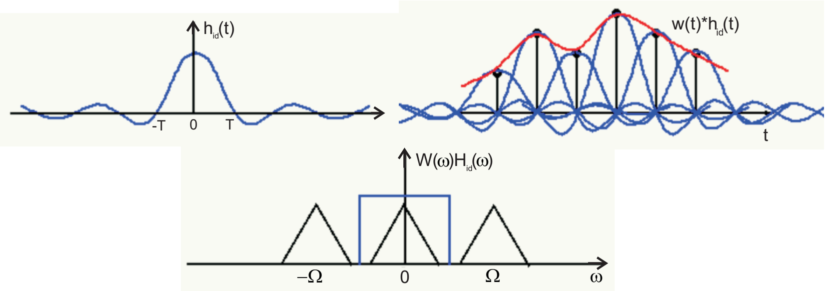
- Interpolation mit si-Funktion

Ideale Interpolation



- ideale Rekonstruktion durch Überlagerung der si-Funktionen

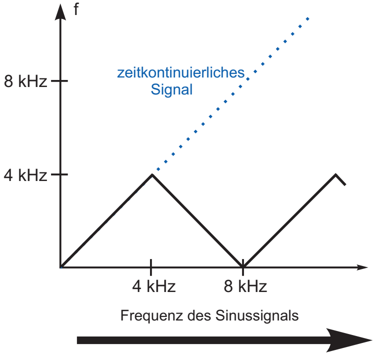
Ideale Interpolation



- ideale Tiefpassfilterung

Nyquist-Frequenz

Experiment: Abtastung und Rekonstruktion eines Audiosignals



F=8000 Hz

Nyquist-Frequenz:
$\frac{F}{2} = 4000$ Hz

- korrekte Rekonstruktion bis zur Nyquist-Frequenz

Nyquist-Shannon-Theorem

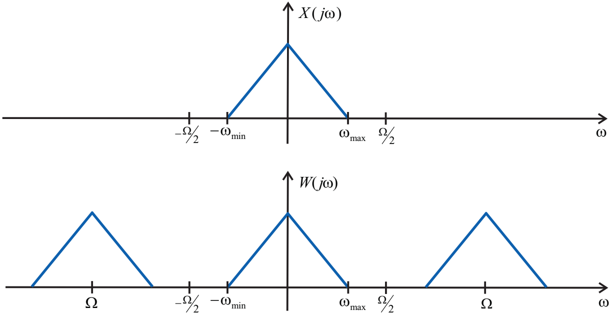
$$\begin{aligned} w(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT) \\ &= x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \frac{1}{T} \cdot x(t) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\Omega t} \end{aligned}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jm\Omega)$$

- Ausblendeeigenschaft: $f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$
- FR des δ-Impulskamms: $\sum_{-n=\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm\Omega t}$

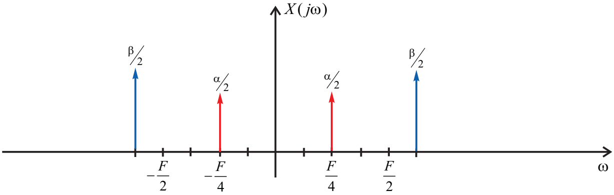
Nyquist-Shannon-Theorem



- keine Überlappung für $\Omega = \omega_{max} - \omega_{min}$
- für $\omega_{max} = \omega_{min} = \omega_g$: $\boxed{\Omega > 2\omega_g}$ bzw. $\boxed{F > 2f_g}$

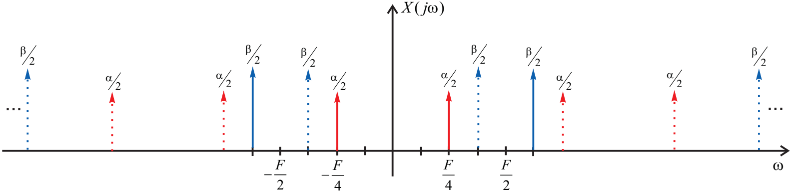
Zusammenfassung

Beispiel: $x(t) = \alpha \cdot cos(\frac{F}{4} 2\pi t) + \beta \cdot cos((\frac{F}{8} + \frac{F}{2}) 2\pi t)$



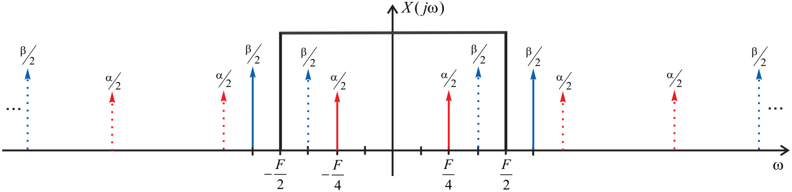
Zusammenfassung

Beispiel: $x(t) = \alpha \cdot cos(\frac{F}{4}2\pi t) + \beta \cdot cos((\frac{F}{8} + \frac{F}{2})2\pi t)$



Zusammenfassung

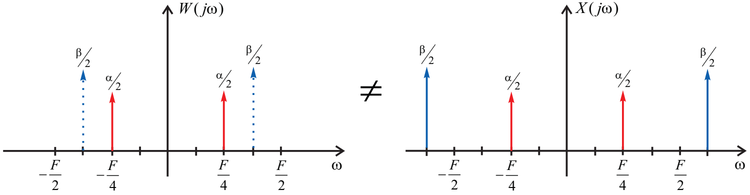
Beispiel: $x(t) = \alpha \cdot cos(\frac{F}{4}2\pi t) + \beta \cdot cos((\frac{F}{8} + \frac{F}{2})2\pi t)$



$\Rightarrow w(t) = \alpha \cdot cos(\frac{F}{4}2\pi t) + \beta \cdot cos((\frac{F}{8} - \frac{F}{2})2\pi t) \neq x(t)$

Zusammenfassung

Beispiel: $x(t) = \alpha \cdot cos(\frac{F}{4}2\pi t) + \beta \cdot cos((\frac{F}{8} + \frac{F}{2})2\pi t)$



$\Rightarrow w(t) = \alpha \cdot cos(\frac{F}{4}2\pi t) + \beta \cdot cos((\frac{F}{8} - \frac{F}{2})2\pi t) \neq x(t)$

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!
Fragen?