Albert Warkentin

Bachelor-Vertiefungsseminar
Das Definieren von Signalen und Systemen

Leitfragen:

- Wie kann man eine Funktion vollständig definieren, die wir zum Modellieren von Signalen und Systemen brauchen?

- Was ist die deklarative und die imperative Definition?

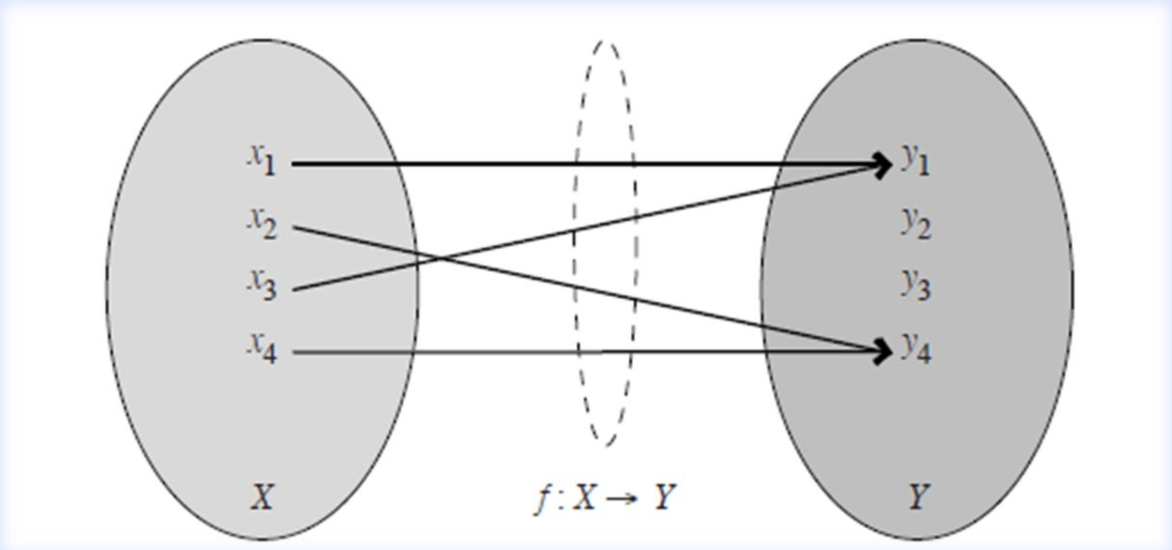
Agenda

- Definieren von Funktionen
- Definieren von Signalen
- Definieren von Systemen
- Fazit

1.Definition von Funktionen

<u>Allgemein</u>

Funktion $f: X \rightarrow Y$



- Funktion *f* ordnet *jedem* Element x einer Definitionsmenge X *genau ein* Element y einer Wertemenge Y zu.

1. Definition von Funktionen

1.1 Erklärende Zuweisung

Funktion Quadrat: $Quadrat: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ Quadrat(x) = x^2$

Zuweisung hat das folgende Muster: Definiere $f: X \rightarrow Y$ *mit*

$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad f(x) = Ausdruck\ in\ x$

Exponentialfunktion einer komplexen Zahl: exp: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\forall\ z \in \mathbb{C},\quad exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

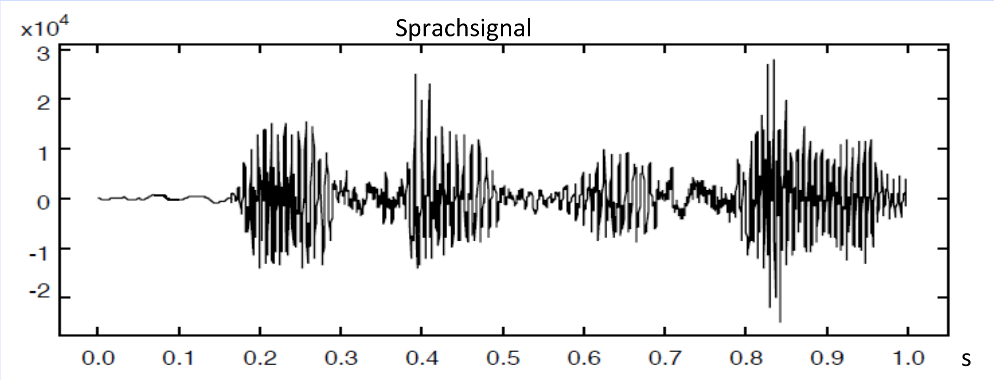
- **deklarierende Zuweisung beschreibt Eigenschaften der Funktion**
- **keine Prozedur/Verfahren für eine Berechnung**

1.Definition von Funktionen

1.2 Funktionsgraphen

$f: \; X \rightarrow Y \qquad Graph\,(f) = \{\, (x, f(x)) \mid x \in X \,\}$

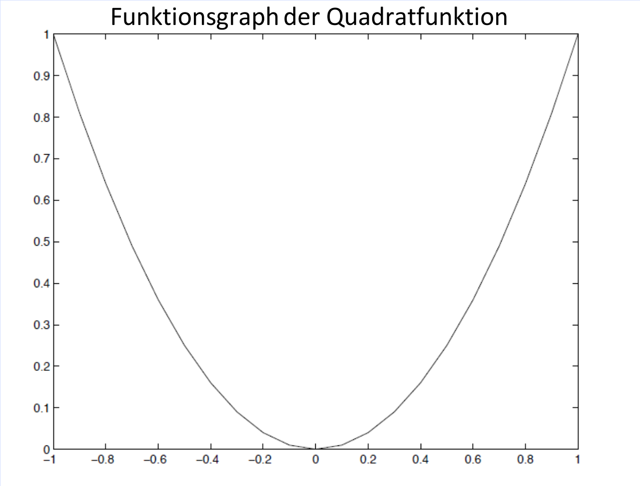
- *Menge aller geordneten Paare (x,f(x))*



Beispiel: Funktionsgraph der Quadratfunktion

$$Graph(Quadrat) = \{\, (x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \,\}$$

- jeder Punkt im Koordinatensystem ist ein Element der Teilmenge $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$
- jedes Paar (x,f(x)) ist ein Element der Teilmenge $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$
- Menge all dieser Paare bezeichnet man als Graphen von f



1.Definition von Funktionen

1.3 Tabellen

Betrachten wir die folgende Funktion:

Punkte: Studenten → [0:100]

- Funktionsgraph kann tabellarisch definiert werden ⇒Voraussetzung: endliche Definitionsmenge

1.4 Verfahren (Prozedur)

Matlab-Prozedur zur Berechnung der Fakultät (n!) : $n \in \mathbb{N}$

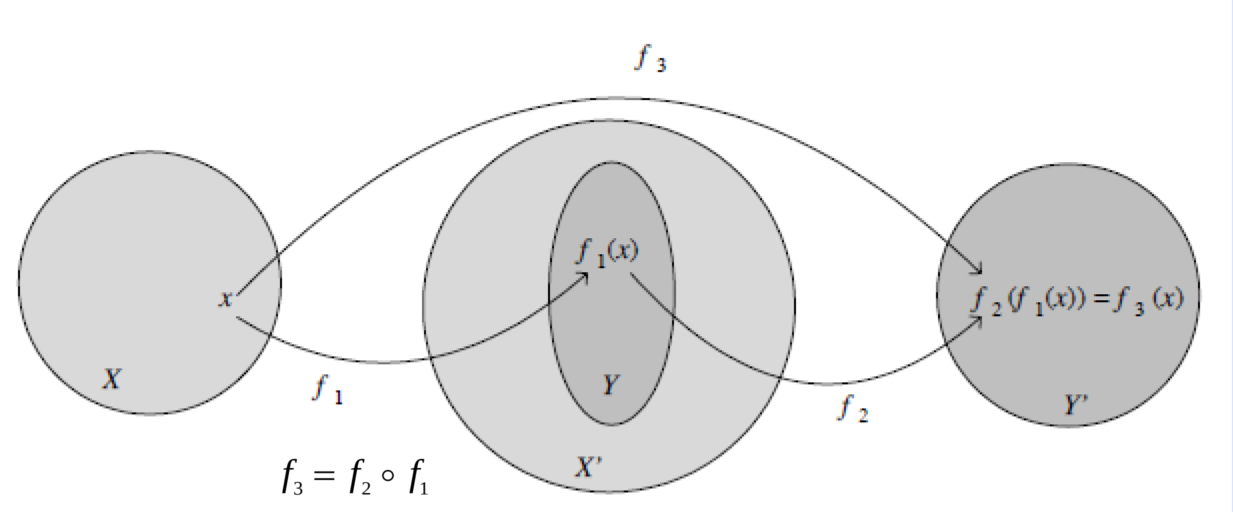
```
fact(1) = 1;
for n = 2:10
 fact(n) = n * fact(n-1);
end
```

- **konstruktive Methode, um einen Wert aus dem Definitionsbereich einem Wert aus dem Wertebereich zuzuweisen**
- **imperative Definitionsart**

1.5 Komposition

$$f_3 = X \rightarrow Y'$$

$$\forall x \in X,\ f_3(x) = f_2(f_1(x))$$



➢ Funktionen werden kombiniert um neue Funktionen zu definieren.

1.Definition von Funktionen

1.6 Imperative vs. Deklarative

- **Deklarative Definition:**
  - Beziehung zwischen Elementen aus Definitions- und Wertebereich
  - wenige Computerprogramme (Maple, Mathematica) verarbeiten deklarative Definition
  - $y^2=x$
- **Imperative Definition:**
  - Prozedur, Operation oder Verfahren, wie man bei einem gegebenem Wert aus dem Definitionsbereich einen Wert aus dem Wertebereich bestimmt
  - werden von Computerprogrammen leichter interpretiert

Beispiel:

$$y = \frac{\sin(x)}{x} \qquad \neq$$

```
Matlab-Code
y=sin(x)/x
```

2. Definition von Signalen

Signale sind Funktionen

Betrachten wir einen einfachen Ton bei 440Hz und die zugehörige Funktion:

Deklarative Definition:

$Klang: Zeit \rightarrow Druck$, mit Menge $Zeit \subset \mathbb{R}$ (Zeitabschnitt) und der Menge *Druck* (Luftdruck).

$\forall\, t \in \; Zeit; \qquad s(t) = \sin(440 \times 2\pi t)$

Imperative Definition:

Matlab-Code:
```
t=[0:1/8000:1];
s = cos(2*pi*440*t);
klang(s,8000)
```
Definitionsbereich, Schrittweite!

Physikalisches Modell:

Ton als Lösung einer Differentialgleichung definieren, die die physikalischen Eigenschaften einer Stimmgabel beschreibt

$\forall\, y \in \mathbb{R}_+ , \quad y(t) = \cos(\omega_0 t)$

$$\ddot{y}(t) = -\omega_0^2 y(t)$$

3.Definition von Systemen

Allgemein:

- alle diskutierten Methoden können zur Definition von Systemen benutzt werden
- in der Praxis komplizierter
- System ist eine komplexe Funktion, wobei der Definitions- und Wertebereich eine Menge von Signalen darstellt. $\Rightarrow$ Signalraum

System $S: [D \to R] \to [D' \to R']$

$x \in [D \to R],\ y = S(x)$ (x,y)-Paar: Verhalten des Systems

Menge aller Verhalten: $\mathit{Verhalten}(S) = \{(x,y) \mid x \in [D \to R] \text{ und } y = S(x)\}$

- Angabe der Menge aller Verhalten $\Rightarrow$ schlechte Systemdefinition

- **System wird beschrieben durch:**
  - **Definitionsbereich mit Eingangssignalen**
  - **Wertebereich mit Ausgangssignalen**
  - **Zuweisungsregel**

3.Definition von Systemen

3.1 Blockdiagramme:

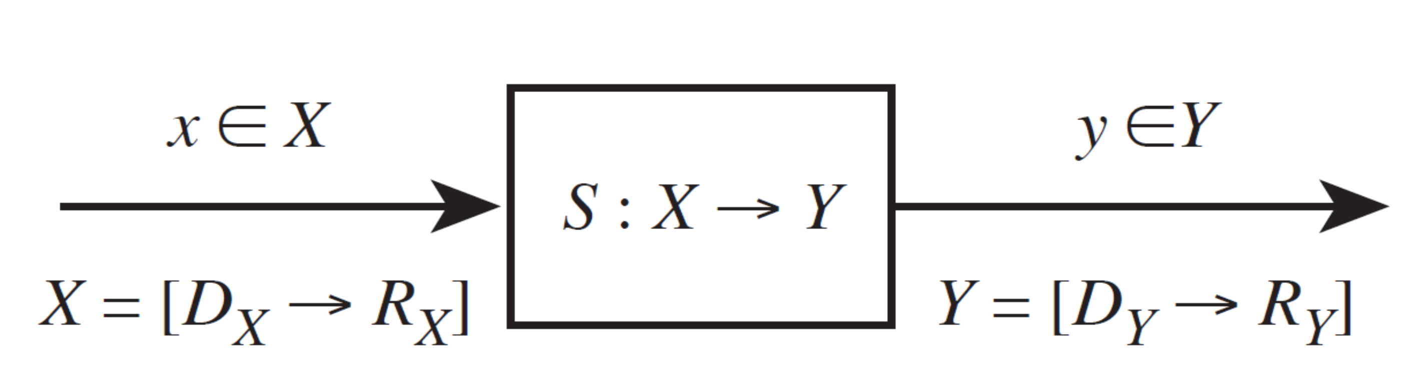
- Aufbau:
  - Pfeile stellen Signale dar
  - Blöcke werden durch Pfeile verbunden
  - Blöcke repräsentieren Systemkomponenten in denen Eingehende-/Eingangssignale in ein Ausgehendes-/Ausgangssignal transformiert werden

- Vorteile:
  - gleiche Aussagekraft wie mathematische Ausdrücke
  - visuelle Syntax beschreibt die Vernetzung einzelner Systemkomponenten
  - Kontrolle des Signalflusses möglich

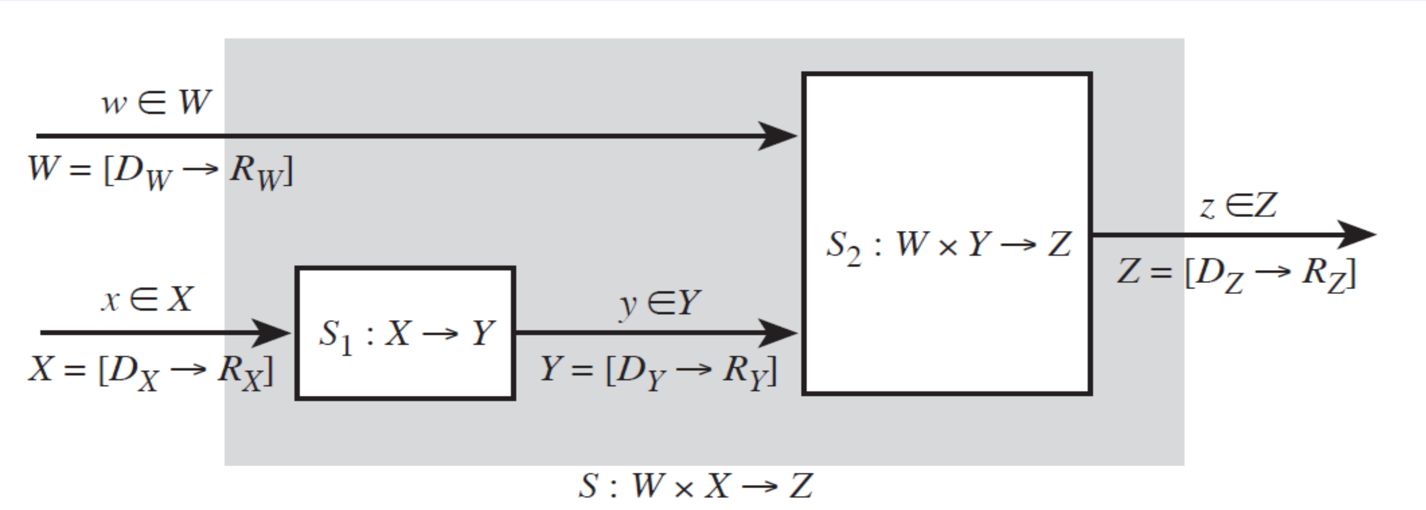
3.Definition von Systemen

3.1 Blockdiagramme:

S: X→Y



$\forall\ (x,w)$,
$S(x,w)=S_2(w,S_1(x))$



4.Fazit

- Signale und Systeme werden durch Funktionen modelliert.
- Definitionsbereich, Wertebereich und die Zuweisungsvorschrift sind zu bestimmen
- Zuweisungsvorschrift hat imperative, deklarative Form
- ist der Definitionsbereich unendlich, liefert die Prozedur eine Approximation
- physikalisches Modell wird durch DGLs, DzGLs beschrieben $\Rightarrow$ ``law of motion´´(Verhalten)
- Verhalten einer elektrischen Schaltung durch kirchhoffsche Regeln definiert
- Systeme sind zerlegbar in Teilsysteme, Blockdiagramme helfen bei Gestaltung von komplexen Systemen und der Analyse.