Übertragungsfunktion

(Frequency Response)

Ayse Yilmaz
30.01.2012

Themenüberblick

- LTI-Systeme (Linear Time-Invariant Systems)
- Zeitinvarianz
- Linearität
- Bestimmung und Anwendung der Übertragungsfunktion

LTI-Systeme

- gehören zu den hochentwickelten Analysetechniken

- Wichtige Eigenschaft:

Wenn das **Eingangssignal** ein **sinusförmiges Signal** ist, dann ist das **Ausgangssignal** auch ein **sinusförmiges Signal** mit der **gleichen Frequenz**, aber vielleicht mit modifizierter Amplitude und Phase .

-Es gilt auch:

Wenn das **Eingangssignal** eine **Summe von Sinussignalen** ist, dann ist das **Ausgangssignal** auch die **gleiche Summe von Sinussignalen** mit jeweils der **gleichen Frequenz**, aber vielleicht jeweils mit modifizierter Amplitude und Phase.

-Jedes periodische Signal → Summe von Sinussignalen

-Entwicklung von Systemen, die (relativ) unabhängig von sinusförmigen Komponenten arbeiten

-Entwicklung durch Betrachtung der Übertragungsfunktion

-andere Möglichkeit : Zustandsmodelle

-LTI-Systeme sind leicht zu verstehen

-das Verhalten ist genau voraussagbar

-Darstellbar mit einfachen Termen

Zeitinvarianz

-Signale im Zeitbereich , Zeitfunktionen

-Definitionsbereich :

$\mathbb{R}$ → zeitkontinuierliche Signale
(z. B. physikalische
Audiosignale)

$\mathbb{Z}$ → zeitdiskrete Signale
(z. B. digitale Audiodatei)

-Systeme mit zeitkontinuierlichem Eingangs-und Ausgangssignal

→ **zeitkontinuierliches System**

-Systeme mit zeitdiskretem Eingangs-und Ausgangssignal

→ **zeitdiskretes System**

Ein einfaches zeitkontinuierliches System:

Verzögerungssystem Dτ

Eingangssignal x → Ausgangssignal y=Dτ (x);

mit $\forall\ \tau \in \mathbb{R}$; y(t)=x(t-$\tau$) (8.1)

-positive Werte von τ ergeben eine positive Verzögerung, trotz Subtraktion
→Verschiebung des Graphen nach rechts

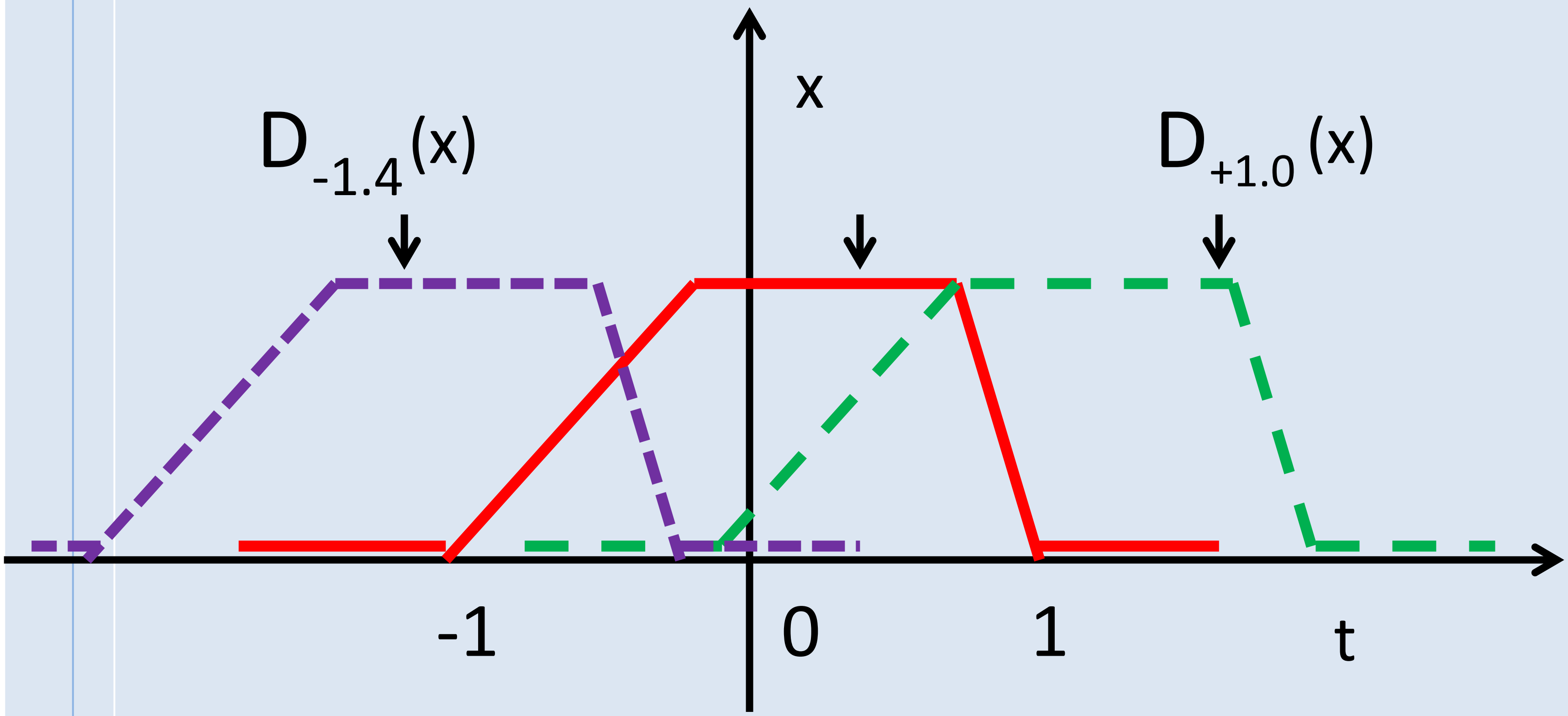

Fig.8.1:Verzögerungssystem

Beispiel:

Ein zeitkontinuierliches Signal mit
$\forall\ t \in \mathbb{R}\ ;\ x(t) = \cos(\Omega t)$

$y = D_{0.5}(x)$
$\forall\ t \in \mathbb{R}\ ;\ y(t) = \cos(\Omega(t-\frac{T}{2})) = \cos(\Omega t-\pi)$

Verzögerung um $\frac{T}{2}$ ist gleich einer Phasenverschiebung um $-\pi$.

-Für sinusförmige Signale gilt:

Zeitverzögerung und Phasenänderung sind ineinander umrechenbar

Phasenänderung von q ist äquivalent zur Phasenänderung von $q+K2\pi\ ;\forall K \in \mathbb{Z}$

Ein **zeitkontinuierliches System S** ist **zeitinvariant**, wenn folgendes gilt:

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{S} \circ \mathbf{D\tau} = \mathbf{D\tau} \circ \mathbf{S} \qquad (8.2)$

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S(D\tau(x))(t) = D\tau(S(x))(t)$

Linearität

-Definitionsbereich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

-Reellwertige Funktionen $\rightarrow$Teilmenge von komplexwertigen Funktionen

-gilt für zeitkontinuierliche und zeitdiskrete Signale

- x → komplexe Funktion,
  a → komplexe Konstante

- neue komplexe Funktion ax:
  $(ax)(t)=a\,x(t)$

- x_1, x_2 → zwei komplexe Funktionen

- neue Funktion (x_1+x_2):
  $(x_1+x_2)(t)=x_1(t)+x_2(t)$

-S ist linear, wenn

Homogenität:

$$S(ax) = aS(x) \qquad (8.11)$$

Additivität:

$$S(x_1+x_2)=S(x_1)+S(x_2) \qquad (8.12)$$

Bestimmung und Anwendung der Übertragungsfunktion

-komplexe Exponentialfunktion

$x \in [\mathbb{R} \to \mathbb{C}]$, mit $\forall t \in \mathbb{R}$

$x(t) = e^{iwt} = \cos(wt) + i \sin(wt)$

$\forall t \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}, x(t-\tau) = e^{iw(t-\tau)} = e^{-iw\tau} e^{iwt}$

- Da $D\tau(x)(t) = x(t-\tau)$, folgt

$D\tau(x) = ax$, mit a = $e^{-iw\tau}$ (8.13)

- Eine **verzögerte komplexe Exponentialfunktion** ist eine **skalierte komplexe Exponentialfunktion**, wo die **Skalierkonstante** die komplexe Zahl **a =** $e^{-iw\tau}$ ist.

-Wenn das Eingangssignal vom zeitkontinuierlichen LTI-System e^{iwt} ist, dann ist das Ausgangssignal H(w) e^{iwt}.

H(w) ist eine Konstante, die von der Frequenz w abhängt.

-Das Ausgangssignal ist eine skalierte Version vom Eingangssignal.

$S : [\mathbb{R} \to \mathbb{C}] \to [\mathbb{R} \to \mathbb{C}]$

Eingangssignal x, $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) = e^{iwt}$

S ist zeitinvariant, wenn für alle $\tau \in \mathbb{R}$

$S \circ D\tau = D\tau \circ S$, $S(D\tau(x)) = D\tau(S(x))$

aus (8.13) : $S(D\tau(x)) = S(ax)$, $a = e^{-iw\tau}$

aus Linearität: $S(ax) = aS(x)$,

$$aS(x) = D\tau(S(x)) \qquad (8.14)$$

Ausgangssignal y = S(x);
in (8.14) einsetzen: ay = Dτ(y)

$\forall t,\tau \in \mathbb{R},\ e^{-iw\tau} y(t) = y(t-\tau)$

$t = 0,\ y(-\tau) = e^{-iw\tau} y(0)$

$t = -\tau,\ y(t) = e^{iwt} y(0)$

$y(0) \rightarrow$ Ausgangssignal, $e^{iwt} \rightarrow$ Eingangs-signal y(0) → Konstante, nicht abhängig von t

→Das Ausgangssignal ist eine komplexe Exponentialfunktion, wie das Eingangssignal, ist aber um y(0) skaliert.

Allgemein: y(0) ist abhängig von w

$$\rightarrow H: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\forall w \in \mathbb{R},\ H(w) = y(0) = (S(x))(0),$$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = e^{iwt} \qquad (8.15)$$

D. h. H(w) ist das Ausgangssignal zum Zeitpunkt 0, wenn das Eingangssignal eine komplexe Exponentialfunktion mit der Frequenz w ist.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = H(w)\, e^{iwt}$

H(w) ist eine **Funktion von w**$\in\mathbb{R}$, Frequenz vom komplexen exponentiellen Eingangssignal.
Die Funktion **H:[**$\mathbb{R}\to\mathbb{C}$**]** heißt **Übertragungsfunktion.**
Sie definiert die Antwort auf das komplexe exponentielle Eingangssignal zu jeder gegebener Frequenz.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit