Seminar Nachrichtentechnik
Adaptive Entzerrer
WS 2005/2006

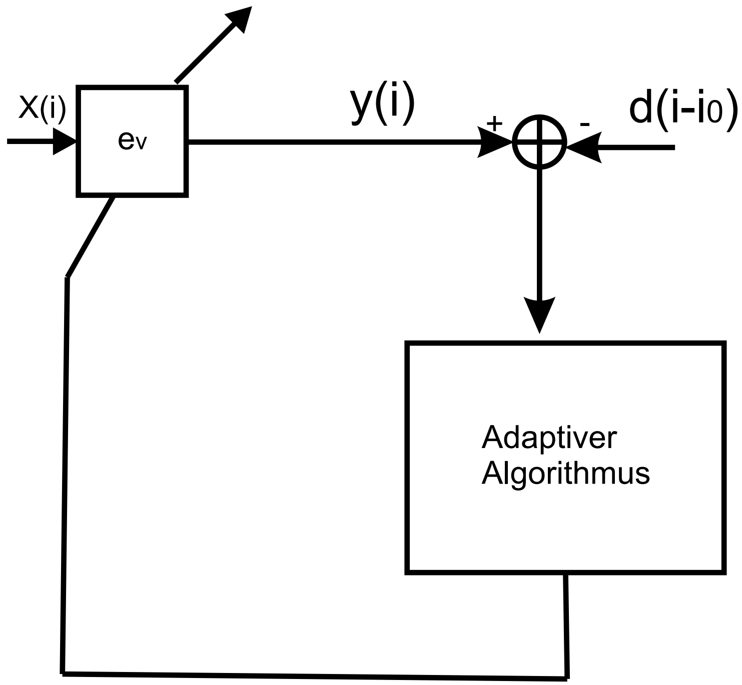
ZEMMARI REDA

1 Einleitung (MMSE-Lösung)
2 Das Gradientenverfahren
3 Least-Mean-Squares-Algorithmus
4 Recursive-Least-Squares- Algorithmus
5 Zusammenfassung

Einleitung (MMSE-Lösung)

Aufgabe des adaptiven Entzerrers

- Empfängerseitige Schaltung :



Transversaler Entzerrer :

$$e(k) = \sum_{i=0}^{n} e_i \delta_{k-i}$$

- Problem : Unbekannte Eigenschaften des Kanals und des entsprechenden Entzerrers
- Lösung :Schätzung der Parameter des Entzerrers

Einleitung (MMSE-Lösung)

- MMSE-Lösung:

$$\mathbf{F} = E\|Y(i) - D(i - i_0)\|^2 \Longrightarrow min$$

wobei

$$Y(i) = X^T(i)e$$

$$e = \begin{pmatrix} e_0 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad , \quad X(i) = \begin{pmatrix} X(iT) \\ \vdots \\ X(iT - nT) \end{pmatrix}$$

und $d(i - i_0)$ eine zwischen Sender und Empfänger vereinbarte Trainingssymbolen Sequenz ist.

Verfahren

- Least-Mean-Squares-Algorithmus
- Recursive-Least-Squares-Algorithmus

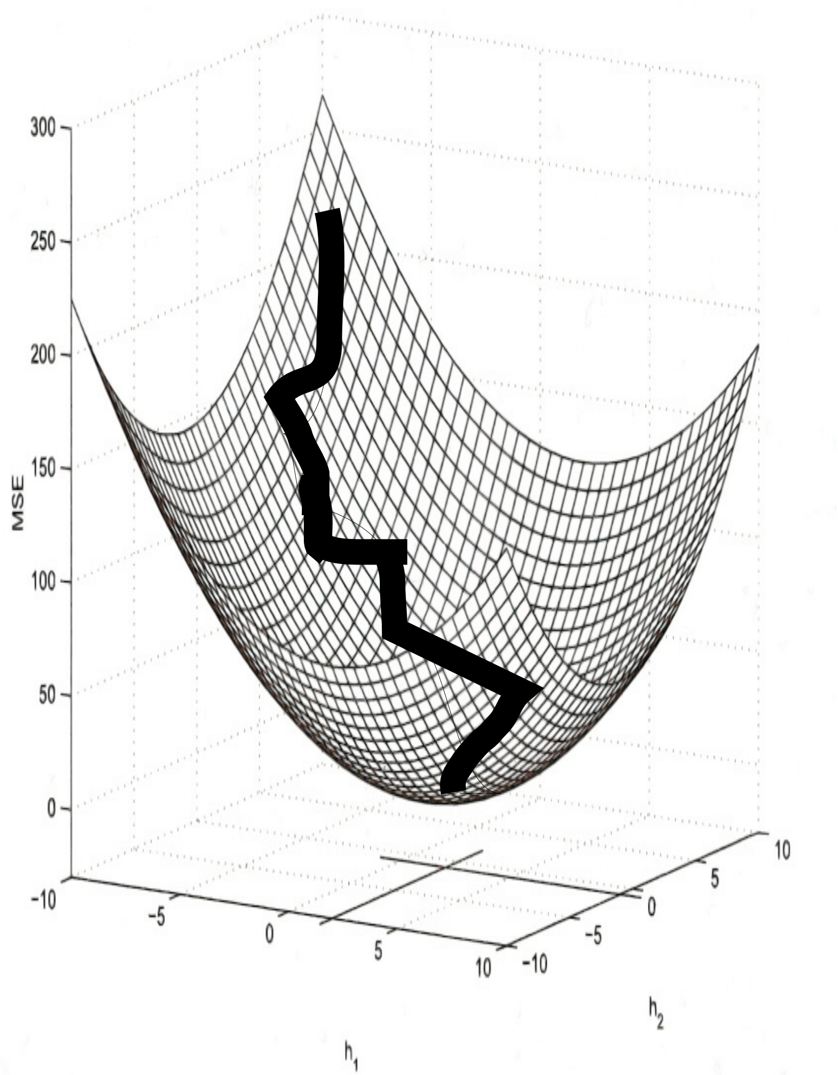
Das Gradientenverfahren

Definition

- Iteratives , numerisches Verfahren
- Beginnend von einem Startpunkt (möglichst nah genug)
- Schrittweise in Richtung des steilsten Abfalls
- Das Minimum einer Funktion annähern

$$X_{i+1} = X_i - \mu \frac{\partial f(X_i)}{\partial X_i}$$

Das Gradientenverfahren



Least-Mean-Squares-Algorithmus

LMS-Algorithmus

- Iteratives Verfahren
- Beruht auf dem Gradientenverfahren
- Optimale Lösung des MMSE Problems

$$e(0) : Startvektor \qquad e(i+1) = e(i) - \mu \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial e^H(i)}$$
$$\mu : positive\ Schrittweite$$

Konvergenz des GV

- F ist in quadratischer Form
- F stellt ein Leistung dar $\Longrightarrow$ immer nicht negativ
- Es existiert immer ein Minimum

$$e_{opt} = \min \mathbf{F} \quad ist\ eindeutig\ bestimmt$$

Least-Mean-Squares-Algorithmus

Der stochastische Gradientalgorithmus

- In der Praxis ist der Erwartungswert unbekannt
- Schätzung des Fehlers durch:

$$\hat{\mathbf{F}} = |y(i) - d(i-i_0)|^2$$

- der stochastische Gradientalgorithmus :

$$e(i+1) = e(i) - \mu \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial e^H(i)}$$

Die Ableitung ist im Sinne von Wirtinger

es gilt dann:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial e^H(i)} &= \frac{\partial [y(i) - d(i-i_0)]^*[y(i) - d(i-i_0)]}{\partial e^H(i)} \\ &= \frac{\partial [e^H(i)x^*(i) - d^*(i-i_0)][e^T(i)x(i) - d(i-i_0)]}{\partial e^H(i)}\end{aligned}$$

Least-Mean-Squares-Algorithmus

Wirtinger Ableitung :

$$\frac{\partial y(i)}{\partial e^H} = \frac{\partial e^T x(i)}{\partial e^H} = 0$$
$$\frac{\partial y^*(i)}{\partial e^H} = \frac{\partial e^H x^*(i)}{\partial e^H} = x^*(i)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial e^H(i)} = x^*(i)[y(i) - d(i - i_0)]$$

LMS-Algorithmus aus dem stochastischen Gradientalgorithmus

$$\begin{aligned} e(i+1) = &\ e(i) - \mu x^*(i)[y(i) - d(i-i_0)] \\ = &\ e(i) - \mu \varepsilon(i) x^*(i) \\ &\ LMS\ Algorithmus \end{aligned}$$

Iterationsschritte wiederholen bis: $\|e(i+1) - e(i)\| < \delta$

- Die Schrittweite μ muss auf dem Intervall (0 , $\frac{2}{\lambda_{max}}$) beschränkt sein , wobei λ_{max} der größte Eigenwert von der Autokorrelationsfunktion R_{XX} ist

Recursive-Least-Squares- Algorithmus

RLS

Korrelationsfunktionen:

$$E\{X^*(i)X(i)\} = R_{XX} \quad , \qquad E\{D^*(k)D(k)\} = \sigma_D^2$$
$$E\{X^*(i)D(i)\} = r_{XD}$$

Squared Error :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(i) &= e^H(i)E\{X^*(i)X^T(i)\}e(i) - e^H(i)E\{X^*(i)D(i-i_0)\} \\ &\quad -E\{D^*(i-i_0)X^T(i)\}e(i) + E\{D^*(i-i_0)D^T(i-i_0)\} \\ &= e^H(i)R_{XX}e(i) - e^H(i)r_{XD} - r_{DX}e(i) + \sigma_D^2\end{aligned}$$

notwendige Bedingung:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial e^H} = R_{XX}e - r_{XD} \doteq 0$$

RLS-Algorithmus:

$$e(i+1) = R_{XX}^{-1}(i)r_{XD}(i)$$

- **Nachteil**: Kenntniss der Autokorrelationsfunktion $R_{XX}(i)$ und Kreuzkorrelationfunktion $r_{XD}(i)$ erforderlich

Recursive-Least-Squares- Algorithmus

- In der Praxis sind AKF und KKF unbekannt
- Schätzung durch zeitliche Mittelung :

$$\hat{R}_{XX}(i) = \sum_{k=0}^{i} w^{i-k} x^*(k) x^T(k)$$

$0 < w < 1$:' Vergessensfaktor' [Forgetting factor] (zeitlich zurückliegende Mittelungsergebnisse werden geschwächt.Sehr üblich bei zeitvarianten Kanälen .)

- rekursiv gilt dann:

$$\hat{R}_{XX}(i) = w\hat{R}_{XX}(i-1) + x^*(i)x^T(i)$$
$$\hat{r}_{XD}(i) = w\hat{r}_{XD}(i-1) + x^*(i)d(i-i_0)$$

- Modifizierter RLS-Algorithmus :

$$e(i+1) = \hat{R}_{XX}^{-1}(i)\hat{r}_{XD}(i)$$

Nachteil : die inverse Matrix muss in jedem Iterationsschritt neu ausgerechnet werden

Recursive-Least-Squares- Algorithmus

Matrix-Inversionslemma

$$\hat{R}_{XX}^{-1}(i) = \frac{1}{w}[\hat{R}_{XX}^{-1}(i-1) - k(i)x^T\hat{R}_{XX}^{-1}(i-1)]$$

$$k(i) = \frac{1}{w+L(i)}\hat{R}_{XX}^{-1}(i-1)x^*(i)$$

wobei $L(i) = x^T\hat{R}_{XX}^{-1}(i-1)x^*(i)$

- aus dem modifizierten RLS- Algorithmus :

$$\begin{aligned}
e(i+1) &= \frac{1}{w}[\hat{R}_{XX}^{-1}(i-1) - k(i)x^T\hat{R}_{XX}^{-1}(i-1)][w\hat{r}_{XD}(i-1) + x^*(i)d(i-i_0)] \\
&= \hat{R}_{XX}^{-1}(i-1)\hat{r}_{XD}(i-1) + \frac{1}{w}\hat{R}_{XX}^{-1}(i-1)x^*(i)d(i-i_0) \\
&\quad -k(i)x^T\hat{R}_{XX}^{-1}(i-1)\hat{r}_{XD}(i-1) - \frac{1}{w}k(i)x^T\hat{R}_{XX}^{-1}(i-1)x^*(i)d(i-i_0) \\
e(i+1) &= e(i) + \frac{1}{w}d(i-i_0)\hat{R}_{XX}^{-1}(i-1)x^*(i) - k(i)x^Te(i) - \frac{L(i)}{w}d(i-i_0)k(i)
\end{aligned}$$

Recursive-Least-Squares- Algorithmus

aus:

$$x^T e(i) = y(i) \quad \text{(Ausgangswert des Entzerrers)}$$

und $$\hat{R}_{XX}^{-1}(i-1)x^*(i) = [w + L(i)]k(i)$$

folgt:

$$e(i+1) = e(i) - k(i)[\underbrace{y(i) - d(i-i_0)}_{\varepsilon(i)}]$$

RLS-Algorithmus:

$$\boxed{e(i+1) = e(i) - k(i)\varepsilon(i)}$$

Recursive-Least-Squares- Algorithmus

RLS-Schritte

- Ausgang ausrechnen

$$y(i) \;=\; x^T e(i)$$

- Vergleich mit Trainingsdaten

$$\varepsilon(i) \;=\; y(i) - d(i - i_0)$$

- Kalman Verstärkung :

$$k(i) = \frac{1}{w + L(i)} \hat{R}_{XX}^{-1}(i-1) x^*(i)$$

$$L(i) = x^T \hat{R}_{XX}^{-1}(i-1) x^*(i)$$

- Aktualisierung der inversen Autokorrelationsmatrix

$$\hat{R}_{XX}^{-1}(i) = \frac{1}{w}[\hat{R}_{XX}^{-1}(i-1) - k(i) x^T \hat{R}_{XX}^{-1}(i-1)]$$

- Aktualisierung des Koeffizientenvektors

$$e(i+1) = e(i) - k(i)\varepsilon(i)$$

$$bis \qquad \|e(i+1) - e(i)\| < \delta$$

Zusammenfassung

vorgestellte Verfahren

- LMS-Algorithmus basiert auf dem Gradientenverfahren
- RLS-Algorithmus mit Hilfe der Kalman Verstärkung

Vor- und Nachteile

- Konvergenzgeschwindigkeit des LMS-Algorithmus hängt von dem Verhältnis zwischen maximalem und minimalem Eigenwert der AKF ab
- Adaptionsgeschwindigkeit wird durch den RLS-Algorithmus gesteigert
- Aktualisierung der inversen Matrix erhöht den Rechenaufwand
- Aufwand in jedem Iterationschritt : $n + 1$ beim LMS und $(n + 1)^2$ beim RLS

Lösung

- Lattice-Entzerrer : gutes Konvergenzverhalten mit kleinem Rechenaufwand verbinden.

Zusammenfassung

Literatur

- Karl-Dirk Kammeyer Nachrichtenübertragung 3.Auflage