



Winfried Schüngel

Streumatrix von passiven Zweitoren



Inhalt



1. Einleitung
2. Begriffsdefinitionen
 - 2.1 Zweitor
 - 2.2 Passivität
3. Die Streumatrix
 - 3.1 Wellengrößen und Streuparameter
 - 3.2 Herleitung der Streumatrix
 - 3.3 Physikalische Interpretation, Leistungsbeziehungen
4. Besondere Eigenschaften der Streuparameter
 - 4.1 Piloty-Funktionen
 - 4.2 Betriebsübertragungsmaß
 - 4.3 Reziprozität und Symmetrie





1. Einleitung

Motivation:

- gegeben: Beschreibung eines elektrischen Netzwerks durch Ströme und Spannungen
- *gut geeignet* zur Beschreibung von Impedanzen, Admittanzen u.ä.;
schlecht geeignet zur Beschreibung von Leistungen
- gesucht: andere Größen, die eine einfachere Beschreibung der Leistungsbeziehungen in einem Netzwerk zulassen

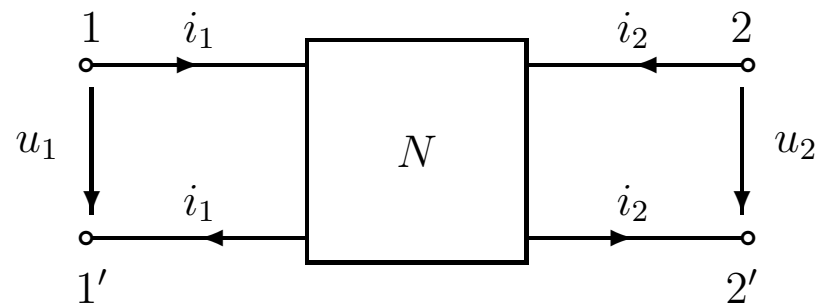




2. Begriffsdefinitionen

2.1 Zweitor

- allgemeiner Fall: Vierpol
- Jedes Klemmenpaar eines Zweitors ist durch eine Spannung und *einen* Strom gekennzeichnet. Man sagt: Die Torbedingung ist erfüllt.



- Wenn die Torbedingung für ein Tor erfüllt ist, dann ist sie stets auch für das andere Tor erfüllt.

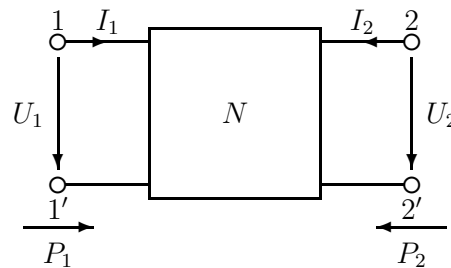




2. Begriffsdefinitionen

2.2 Passivität

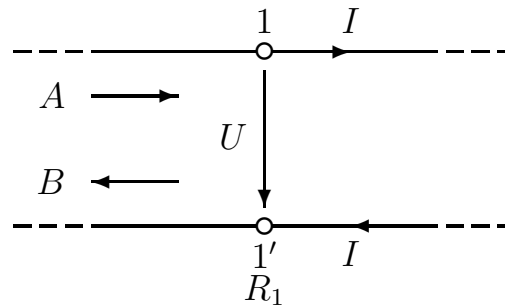
- Ein (elektrisches) Bauelement heißt *passiv*, wenn es dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik in dem Sinne genügt, daß ihm, ausgehend von einem beliebigen endlichen Anfangszeitpunkt t_0 , höchstens endlich viel Energie entzogen werden kann.
(nach A. Fettweis)
- Formal gilt für den eingeschwungenen Zustand mit $u, i \sim e^{pt}$:
 $P \geq 0$ für $\text{Re}\{p\} \geq 0$ (mit $p = \sigma + j\omega$)
- Die getroffenen Aussagen lassen sich entsprechend auf Zweitoren anwenden:





3. Die Streumatrix

3.1 Wellengrößen und Streuparameter



- Wir betrachten zunächst ein Eintor und führen einen *beliebig* gewählten Torwiderstand $R_1 > 0$ ein.
- Nun definieren wir folgende Wellengrößen:
$$A = \frac{U + R_1 I}{2\sqrt{R_1}} \quad B = \frac{U - R_1 I}{2\sqrt{R_1}}$$
- eindeutig umkehrbare Variablentransformation





3. Die Streumatrix

3.1 Wellengrößen und Streuparameter

- Für die Wirkleistung ergibt sich bei geeigneter Wahl des Torwiderstands:

$$P = \operatorname{Re}\{UI^*\} = |A|^2 - |B|^2$$

- Vorteil: Leistung läßt sich durch vorzeichenrichtige Überlagerung von $|A|^2$ und $|B|^2$ beschreiben.
- A beschreibt die maximal über ein Tor übertragbare Leistung, B beschreibt die am Tor reflektierte Leistung.
- Fall $|A| = |B|$: Totale Reflexion
Fall $B = 0$: Leistungsanpassung





3. Die Streumatrix

3.2 Herleitung der Streumatrix

- Jetzt: Erweiterung der Theorie auf Zweitore.
- Man ordnet jedem Tor eine *einfallende* und eine *reflektierte* Welle zu:

$$A_1 = \frac{U_1 + R_1 I_1}{2\sqrt{R_1}} = \frac{E_1}{2\sqrt{R_1}} \quad B_1 = \frac{U_1 - R_1 I_1}{2\sqrt{R_1}} = \frac{2U_1 - E_1}{2\sqrt{R_1}}$$

$$A_2 = \frac{U_2 + R_2 I_2}{2\sqrt{R_2}} = \frac{E_2}{2\sqrt{R_2}} \quad B_2 = \frac{U_2 - R_2 I_2}{2\sqrt{R_2}} = \frac{2U_2 - E_2}{2\sqrt{R_2}}$$

- Diese vier Beziehungen lassen sich ineinander einsetzen und nach den reflektierten Wellen B_1 , B_2 auflösen.
- Die Ströme und Spannungen hängen i.a. von der Frequenz p ab.





3. Die Streumatrix

3.2 Herleitung der Streumatrix

$$B_1 = S_{11}(p)A_1 + S_{12}(p)A_2$$

$$B_2 = S_{21}(p)A_1 + S_{22}(p)A_2$$

mit

$$S_{11}(p) = \left(\frac{2U_1 - E_1}{E_1} \right)_{E_2=0} \quad S_{12}(p) = \left(2\sqrt{\frac{R_2 U_1}{R_1 E_2}} \right)_{E_1=0}$$

$$S_{21}(p) = \left(2\sqrt{\frac{R_1 U_2}{R_2 E_1}} \right)_{E_2=0} \quad S_{22}(p) = \left(\frac{2U_2 - E_2}{E_2} \right)_{E_1=0}$$



3. Die Streumatrix

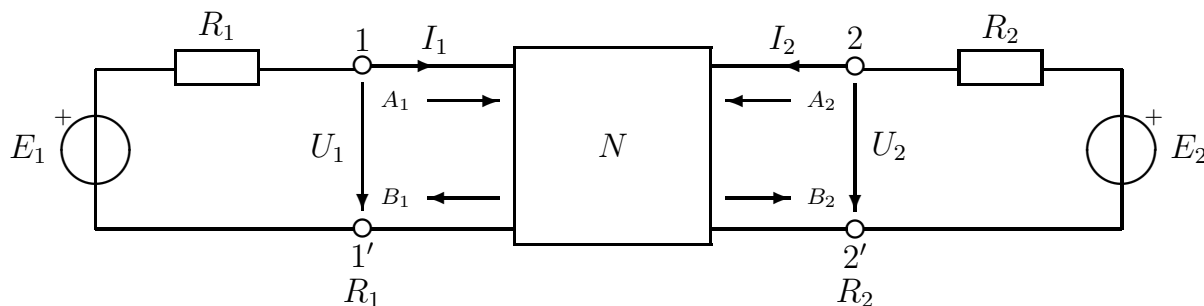


3.2 Herleitung der Streumatrix

- Die Koeffizienten S_{ij} werden als Streuparameter bezeichnet.
Wir können schreiben: $\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{A}$

mit
$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

- einfache Betriebssystemung: Torwiderstände = Abschlußwiderstände

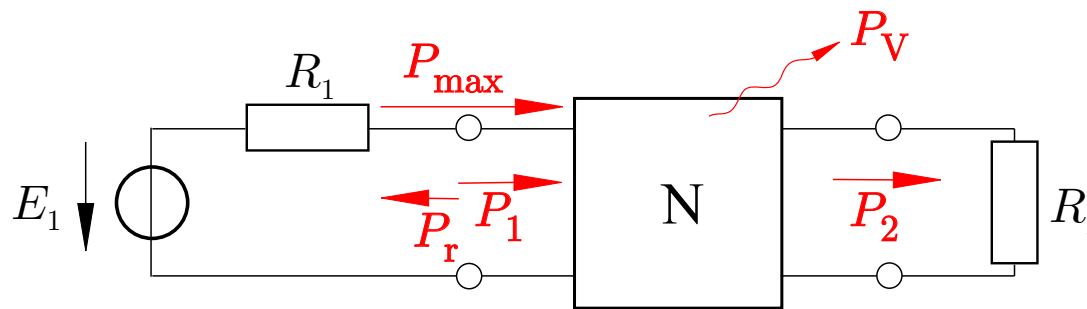




3. Die Streumatrix

3.3 Physikalische Interpretation, Leistungsbeziehungen

- S_{ii} : Reflektanz an Tor i , $S_{ij, i \neq j}$: Transmittanz von Tor j nach Tor i
- Bezüglich der Leistungsübertragung ergibt sich folgendes Bild:



- Man kann zeigen: $|S_{11}(j\omega)|^2 = \frac{P_r}{P_{max}}$, $|S_{21}(j\omega)|^2 = \frac{P_2}{P_{max}}$
- Leistungsbilanz: $P_1 = P_{max} - P_r$, $P_2 = P_1 - P_V$





3. Die Streumatrix

3.3 Physikalische Interpretation, Leistungsbeziehungen

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_r + P_2 &= P_{max} - P_V \\ \Leftrightarrow \frac{P_r}{P_{max}} + \frac{P_2}{P_{max}} &= 1 - \frac{P_V}{P_{max}} \end{aligned}$$

Die Verhältnisse $\frac{P_r}{P_{max}}$ und $\frac{P_2}{P_{max}}$ werden gerade durch $|S_{11}(j\omega)|^2$ und $|S_{21}(j\omega)|^2$ ausgedrückt. Also:

$$|S_{11}(j\omega)|^2 + |S_{21}(j\omega)|^2 = 1 - \frac{P_V}{P_{max}} \quad \text{bzw.}$$

$$|S_{22}(j\omega)|^2 + |S_{12}(j\omega)|^2 = 1 - \frac{P_V}{P_{max}}$$



4. Besondere Eigenschaften der Streuparameter



4.1 Piloty-Funktionen

- $f(p)$ heißt Piloty-Funktion, falls gilt:
 1. $f(p)$ ist reell und rational.
 2. $|f(p)| \leq 1$ für $\text{Re}\{p\} \geq 0$
- Erneute Betrachtung der Leistungsbeziehungen:

$$|S_{11}(j\omega)|^2 + |S_{21}(j\omega)|^2 = 1 - \frac{P_V}{P_{max}} \leq 1,$$

da bei passiven Zweitoren $P_V \geq 0$ (Übergang von $j\omega$ auf p erfordert geeignete analytische Fortsetzung).

Außerdem werden nur reelle Bauelementwerte (z.B. R , L , C) zugelassen.

⇒ Die Streuparameter eines passiven Zweitors sind Piloty-Funktionen.



4. Besondere Eigenschaften der Streuparameter



4.2 Betriebsübertragungsmaß

- Die Transmittanz S_{21} ist eine Übertragungsfunktion. An ihrer Stelle wird für $p = j\omega$ häufig das logarithmische Betriebsübertragungsmaß Γ verwendet:
$$S_{21}(j\omega) = e^{-\Gamma} \Leftrightarrow \Gamma(\omega) = \ln \frac{1}{S_{21}(j\omega)}$$
- Zerlegung in Real- und Imaginärteil:
$$\Gamma(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

mit $A(\omega)$: Betriebsdämpfung, $B(\omega)$: Betriebsphase (nicht zu verwechseln mit den oben verwendeten Wellengrößen).
- Für die Signalübertragung durch ein Zweitor gilt: $A(\omega)$ ist ein Maß für die Veränderung der Amplitude, $B(\omega)$ für die Drehung der Phase des Eingangssignals.



4. Besondere Eigenschaften der Streuparameter



4.3 Reziprozität und Symmetrie

- *Reziprozität*: Zweitor ist reziprok, wenn Übertragungseigenschaften in beide Richtungen identisch sind (Übertragungssymmetrie)
- *Symmetrie*: Zweitor ist symmetrisch, wenn Vertauschen von Tor 1 und Tor 2 von außen nicht erkennbar ist

Symmetrie \Rightarrow Reziprozität

- $S_{21} = S_{12}$, falls Zweitor reziprok
- zusätzlich $S_{11} = S_{22}$, falls Zweitor symmetrisch



Literatur



- [1] A. FETTWEIS, G. HEMETSBERGER: *Grundlagen der Theorie elektrischer Schaltungen*. Skript, Bochum, 2004
- [2] A. FETTWEIS: *Netzwerktheorie (Studienarbeit von Marc Lechterbeck)*. Skript, Bochum, 1992
- [3] K.-A. OWENIER: *Optimierung von Filtern, insbesondere von Wellendigitalfiltern mit verringerter Zahl an Multiplizierern*. Dissertation, Bochum, 1977

