Markus Kasper

Kanonische Polynome und charakteristische Funktion

Inhalt

Eigenschaften der Streumatrix

Die Streumatrix verlustfreier Zweitore

- Das Übertragungsverhalten eines verlustfreien Zweitores läßt sich mit Hilfe der Streumatrix beschreiben.
- Für die Wellengrößen gilt bei einem verlustfreiem Zweitor:

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{S} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} S_{11}(p) & S_{12}(p) \\ S_{21}(p) & S_{22}(p) \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Streumatrix

Eigenschaften der Streumatrix $\boldsymbol{S}$ eines verlustfreien Zweitors

1. Die Einträge von $\boldsymbol{S}$ sind reelle, rationale Funktionen

2. Diese Funktionen sind holomorph $\forall\ p$ mit Re$\{p\} \geq 0$

3. $\boldsymbol{S}$ ist paraunitär $\forall\ p$, d.h. $\boldsymbol{S}_*\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I}_2$
   . mit $\boldsymbol{S}_* = \boldsymbol{S}^T(-p)$ (parakonjugierte Matrix)

4. Die Funktion $\Delta(p) = det\boldsymbol{S}$ ist eine Allpassfunktion.

Eigenschaften der Streumatrix

- Zu den Eigenschaften 1 und 2:
  Diese Eigenschaften sind erfüllt, da es sich bei den Streuparametern um Piloty-Funktionen handelt.

- Zu Eigenschaft 3:

$$
\begin{aligned}
P &= \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B} \\
&= \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{A} \\
&= \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S})\boldsymbol{A} \\
&= \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

  ist die aufgenommene Wirkleistung eines Zweitores

  $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S} = \boldsymbol{D}^*$ heißt Dissipationsmatrix oder auch Hermite'sche Matrix

Eigenschaften der Streumatrix

- Satz 1: Für ein verlustfreies Zweitor gilt $\boldsymbol{D} = \mathbf{0}_2 \; \forall \; p$ mit $\text{Re}\{p\} = 0$

  , denn $\quad \forall \quad p = j\omega$ gilt bei Verlustfreiheit

$$
\begin{aligned}
P &= \boldsymbol{A}^* \boldsymbol{D} \boldsymbol{A} \\
&= D_{11}(p)|A_1|^2 + D_{22}(p)|A_2|^2 + D_{12}(p)A_1^* A_2 + D_{21}(p)A_1 A_2^* \\
&= 0
\end{aligned}
$$

  Da diese Beziehung für beliebige A_1, A_2 gelten muss, findet man mit

$$
\begin{aligned}
A_1 = 0 &\Rightarrow D_{22}(p) = 0 \\
A_2 = 0 &\Rightarrow D_{11}(p) = 0 \\
A_1 = A_2 = 1 &\Rightarrow D_{12}(p) + D_{21}(p) = 0 \\
A_1 = 1 \text{ und } A_2 = j &\Rightarrow D_{12}(p) - D_{21}(p) = 0 \\
&\Rightarrow D_{12}(p) = D_{21}(p) = 0
\end{aligned}
$$

  , womit die Aussage des Satzes bewiesen wäre.

Eigenschaften der Streumatrix

Aus Satz 1 folgt direkt $\boldsymbol{S}^*\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I}_2$ für $p = j\omega$.

Dies läßt sich auch schreiben als $\boldsymbol{S}^T(-p)\boldsymbol{S}(p) = \boldsymbol{I}_2$

und mit Hilfe einer geeingeten analytischen Fortsetzung für alle p verallgemeinern,

woraus schließlich die zu zeigende Eigenschaft 3 folgt.

Eigenschaften der Streumatrix

- Zu Eigenschaft 4:
  Definition einer Allpassfunktion: Eine Paraunimodulare Piloty-Funktion. Paraunimodular heißt $F(p)F_*(p) = 1 \; \forall \; p$

$$\Delta(p) = S_{11}(p)S_{22}(p) - S_{12}(p)S_{21}(p) = det\boldsymbol{S}$$
$$\Delta_*(p) = S_{11*}(p)S_{22*}(p) - S_{12*}(p)S_{21*}(p) = det\boldsymbol{S}_*$$

Aus $\boldsymbol{S}_*\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I}_2$ (Eigenschaft 3) folgt $det\boldsymbol{S}_* det\boldsymbol{S} = \Delta_*(p)\Delta(p) = 1$
Da die Streuparameter Piloty-Funktionen sind, ist auch $\Delta(p)$ eine Piloty-Funktion.

Erinnerung:
Piloty-Funktion heißt:
reell, rational, $|F(j\omega)| \leq 1 \; \forall \; \omega$ und holomorph für Realteil $p > 0$

Die Allpassfunktion

Eine Allpassfunktion läßt sich in folgender Form aufschreiben:
$F(p) = -\sigma \frac{G_*(p)}{G(p)}$
mit $G(p)$: reelles Hurwitz-Polynom und $\sigma = \pm 1$

<u>Beweis:</u>

1. $F(p)$ ist reell und rational, weil $G(p)$ ein reelles Hurwitz-Polynom ist.
2. Zählergrad $=$ Nennergrad und $G(p)$ ist ein Hurwitz-Polynom $\Rightarrow$ holomorph für Realteil $p > 0$
3. $F(p)F_*(p) = \sigma \frac{G_*(p)}{G(p)} \sigma \frac{G(p)}{G_*(p)} = \sigma^2 = 1$

Die Polynome $f(p)$ und $h(p)$

$$\boldsymbol{S}^{-1} = \frac{1}{\Delta(p)} \begin{pmatrix} S_{22}(p) & -S_{12}(p) \\ -S_{21}(p) & S_{11}(p) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_* \boldsymbol{S} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{S}_* = \boldsymbol{S}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} S_{11*}(p) & S_{21*}(p) \\ S_{12*}(p) & S_{22*}(p) \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta(p)} \begin{pmatrix} S_{22}(p) & -S_{12}(p) \\ -S_{21}(p) & S_{11}(p) \end{pmatrix}$$

$$\Delta(p) = -\sigma \frac{g_*(p)}{g(p)}$$

$\Rightarrow$ man erhält 4 Gleichungen

Die Polynome $f(p)$ und $h(p)$

$$
\begin{aligned}
-\sigma g_*(p) S_{11*}(p) &= g(p) S_{22}(p) \\
\sigma g_*(p) S_{21*}(p) &= g(p) S_{12}(p) \\
\sigma g_*(p) S_{12*}(p) &= g(p) S_{21}(p) := f(p) \\
-\sigma g_*(p) S_{22*}(p) &= g(p) S_{11}(p) := h(p)
\end{aligned}
$$

Die erste und vierte und die zweite und dritte Gleichung sind äquivalent.

$f(p)$ und $h(p)$ sind reell, rational holomorph außer in $p = \infty$, also reelle Polynome.

Die Belevitch-Form der Streumatrix

Die Belevitch-Form der Streumatrix

Mit Hilfe der Polynome $g(p)$, $h(p)$ und $f(p)$ lässt sich die Streumatrix schreiben als

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{g(p)} \begin{pmatrix} h(p) & \sigma f_*(p) \\ f(p) & -\sigma h_*(p) \end{pmatrix}$$

Diese Darstellungsform wird die Belevitch-Form genannt.

Aus $det\boldsymbol{S} = \Delta(p) = -\sigma \frac{h(p)h_*(p)+f(p)f_*(p)}{g^2(p)} = -\sigma \frac{g_*(p)}{g(p)}$

folgt die wichtige Gleichung

$$h(p)h_*(p) + f(p)f_*(p) = g(p)g_*(p)$$

Die charakteristische Funktion $\psi(p)$

Die Betriebsdämpfung eines Zweitores wird über die Transmittanz $S_{21}(j\omega)$ definiert.

$$A(\omega) = -\ln|S_{21}(j\omega)| = -\frac{1}{2}\ln|S_{21}(j\omega)|^2$$

Aus $0 \leq |S_{21}(j\omega)| \leq 1$ folgt $0 \leq A(\omega)| \leq \infty$

Die charakteristische Funktion $\psi(p)$

Mit der Feldtkellergleichung $|S_{11}(j\omega)|^2 + |S_{21}(j\omega)|^2 = 1$ für verlustfreie Zweitore ergibt sich

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{|S_{21}(j\omega)|^2} \\
&= \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{|S_{11}(j\omega)|^2}{|S_{21}(j\omega)|^2}) \\
&= \frac{1}{2} \ln(1 + |\psi(j\omega)|^2)
\end{aligned}
$$

$\psi(p) = \frac{S_{11}(p)}{S_{21}(p)}$ heißt charakteristische Funktion.

Die charakteristische Funktion $\psi(p)$

In Belevitch-Form erhält man $\psi(p) = \frac{S_{11}(p)}{S_{21}(p)} = \frac{h(p)}{f(p)}$

Polstellen der Betriebsdämpfung entsprechen Polstellen der charakteristischen Funktion

Nullstellen der Betriebsdämpfung entsprechen Nullstellen der charakteristischen Funktion

$\Rightarrow$ Mit Hilfe der Nullstellen von $h(p)$ und $f(p)$ auf der $j\omega$-Achse kann man einen beliebigen Verlauf der Betriebsdämpfung realisieren. Zusätzlich zu den Nullstellen der Polynome erzeugt der Gradunterschied zwischen $h(p)$ und $f(p)$ einen weiteren Pol bzw. eine weitere Nullstelle der charakteristischen Funktion bei $p \rightarrow \infty$.

Damit die Polynome reell bleiben müssen Pol bzw. Nullstellen immer als konjugiert komplexe Paare auftreten.

Die Bestimmung von $g(p)$

Hat man $f(p)$ und $h(p)$ so gewählt, dass die Betriebsdämpfung das gewünschte Übertragungsverhalten realisiert, gilt es nun ein passendes $g(p)$ zu bestimmen.

Wir definieren $q(p) := h(p)h_*(p) + f(p)f_*(p) = g(p)g_*(p)$

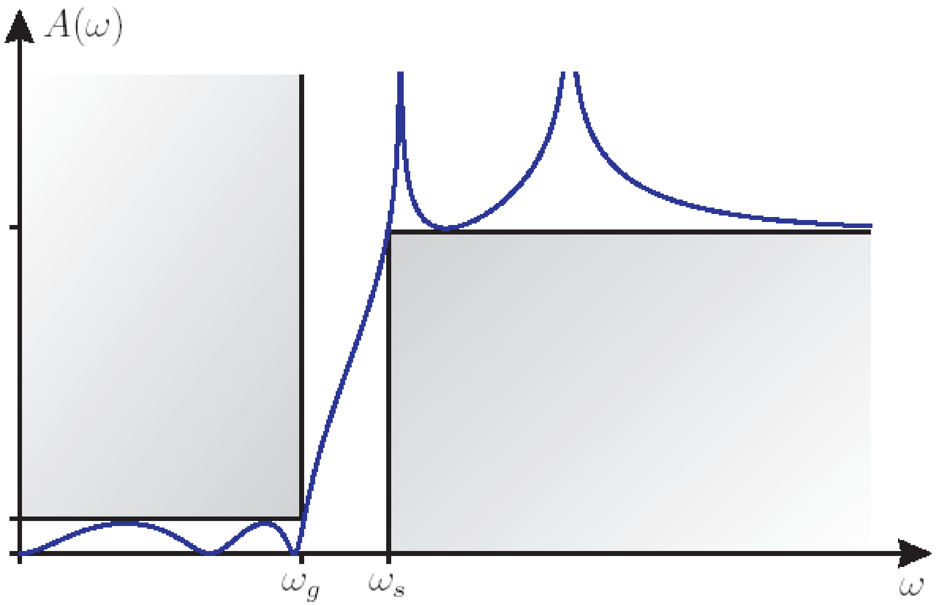
Ist p_0 Nullstelle von $q(p)$, so ist wegen

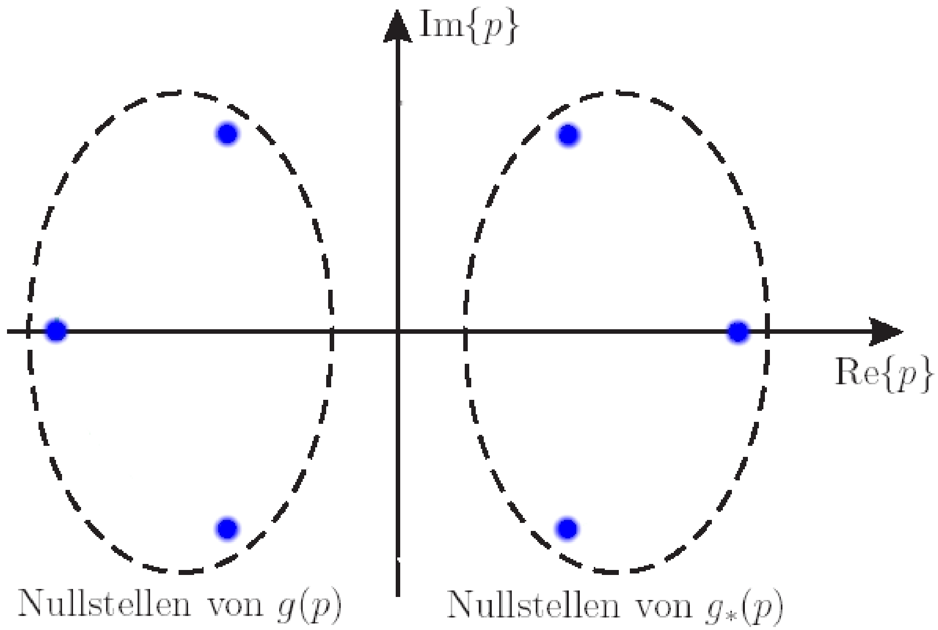
$$q(-p) = h(-p)h_*(-p) + f(-p)f_*(-p) = h_*(p)h(p) + f_*(p)f(p) = q(p)$$

auch $-p_0$ eine Nullstelle von $q(p)$

Da $q(p)$ ein reelles Polynom ist, gilt ebenfalls $q(p_0^*) = q^*(p_0) = 0$

Die Bestimmung von $g(p)$





Definitionen: symmetrisch, antimetrisch, reziprok

- Def. Symmetrie: $S_{11}(p) = S_{22}(p)$ und $S_{12}(p) = S_{21}(p)$
- Def. Antimetrie: $S_{11}(p) = S_{22}(p)$ und $S_{12}(p) = -S_{21}(p)$
- Def. Reziprozität: $S_{12}(p) = S_{21}(p)$

  Aus der Reziprozität folgt $f(p) = \sigma f_*(p)$,
  d.h. $f(p)$ muss entweder gerade oder ungerade sein.

  Für ein gerades Polynom $f(p)$ folgt $\sigma = 1$, für ein ungerades ist $\sigma = -1$

Symmetrische Zweitore

Es gilt $S_{11}(p) = S_{22}(p)$ und $S_{12}(p) = S_{21}(p)$

In Belevitch-Form erhält man: $h(p) = -\sigma h_*(p)$ und $f(p) = \sigma f_*(p)$

$\Rightarrow q(p) = h(p)h_*(p) + f(p)f_*(p) = \sigma(f^2(p) - h^2(p))$

Die Gleichung kann man mit der 3. Binomischen Formel aufspalten in $(f(p) + h(p))(f(p) - h(p))$ und braucht dann nur noch die Nullstellen von einem dieser Faktoren bestimmen.

Ersetzt man p durch $-p$ gehen die beiden Gleichungen ineinander über, da wenn $f(p)$ gerade ist $h(p)$ ungerade ist und vice versa.

$\psi(p)$ ist eine ungerade Funktion

Antimetrische Zweitore

Es gilt $S_{11}(p) = S_{22}(p)$ und $S_{12}(p) = -S_{21}(p)$

In Belevitch-Form erhält man: $h(p) = -\sigma h_*(p)$ und $f(p) = -\sigma f_*(p)$

$\Rightarrow q(p) = h(p)h_*(p) + f(p)f_*(p) = -\sigma(f^2(p) + h^2(p))$

Die Gleichung kann man mit der 3. Binomischen Formel aufspalten in $(h(p) + jf(p))(h(p) - jf(p))$ und braucht dann nur noch die Nullstellen von einem dieser Faktoren bestimmen.

Auch hier reicht es die Nullstellen für einen Faktor zu bestimmen, da $[h(p) + jf(p)]^* = h(p^*) - jf(p^*)$ ist.

$\psi(p)$ ist eine gerade Funktion.

Die Kettenstreumatrix

Die Kettenstreumatrix oder auch Transfermatrix $\boldsymbol{T}$

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} T_{11}(p) & T_{12}(p) \\ T_{21}(p) & T_{22}(p) \end{pmatrix}$$

lässt sich ebenfalls in Belevitch-Form darstellen:

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{f(p)} \begin{pmatrix} \sigma g_*(p) & h(p) \\ \sigma h_*(p) & g(p) \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat den Vorteil, dass man bei Kettenschaltungen nur die Teilmatritzen miteinander multiplizieren braucht, um die Gesamtmatrix zu erhalten. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass man ein kompliziertes System umgekehrt durch Faktorisierung in einfache Systeme mit Polynomen kleineren Grades zerlegen kann.

Quellenangaben

Literatur:

- A.Fettweis, Netzwerktheorie, Skript
  Studienarbeit von Marc Lechterbeck), Bochum 1992

- K.-A.Owenier, Optimierung von Filtern, insbesondere von Wellendigitalfiltern mit verringerter Zahl an Multiplizierern,
  Dissertation, Bochum 1977