



Hayg Dabag

Standardfälle der Dämpfungsapproximation



Inhalt



1. Grundlagen

1.1 Die charakteristische Funktion $\psi(p)$

1.2 Die Polynome $f(p)$ und $h(p)$

2. Standard Tiefpässe

2.1 Der Dämpfungsverlauf $A(\omega)$ von Tiefpässen

2.2 Die Butterworth-Tiefpässe

2.3 Die Tschebyscheff-Tiefpässe

2.3.1 Die Tschebyscheffpolynome

2.3.2 Die Tschebyscheff-Tiefpässe

2.4 Die Cauer-Tiefpässe





Die charakteristische Funktion $\psi(p)$

Mit der Feldtkellergleichung $|S_{11}(j\omega)|^2 + |S_{21}(j\omega)|^2 = 1$ für verlustfreie Zweitore ergibt sich für die Betriebsdämpfung

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{|S_{21}(j\omega)|^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{|S_{11}(j\omega)|^2}{|S_{21}(j\omega)|^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + |\psi(j\omega)|^2) \end{aligned}$$

$\psi(p) = \frac{S_{11}(p)}{S_{21}(p)}$ heißt charakteristische Funktion.



Die charakteristische Funktion $\psi(p)$



In Belevitch Form erhält man $\psi(p) = \frac{h(p)}{f(p)}$

Polstellen der Betriebsdämpfung entsprechen Polstellen der charakteristischen Funktion.

Nullstellen der Betriebsdämpfung entsprechen Nullstellen der charakteristischen Funktion.

⇒ Mit Hilfe der Nullstellen von $h(p)$ und $f(p)$ auf der $j\omega$ -Achse kann man einen beliebigen Verlauf der Betriebsdämpfung realisieren. Zusätzlich zu den Nullstellen der Polynome erzeugt der Gradunterschied zwischen $h(p)$ und $f(p)$ weitere Polstellen bzw. weitere Nullstellen der charakteristischen Funktion bei $p \rightarrow \infty$.

Damit die Polynome reell sind, müssen Polstellen bzw. Nullstellen immer als konjugiert komplexe Paare auftreten.



Der Dämpfungsverlauf $A(\omega)$ eines Tiefpasses



$A(\omega) < A_D$ für $f < f_g$ A_D : Durchlaßdämpfung, f_g : Grenzfrequenz

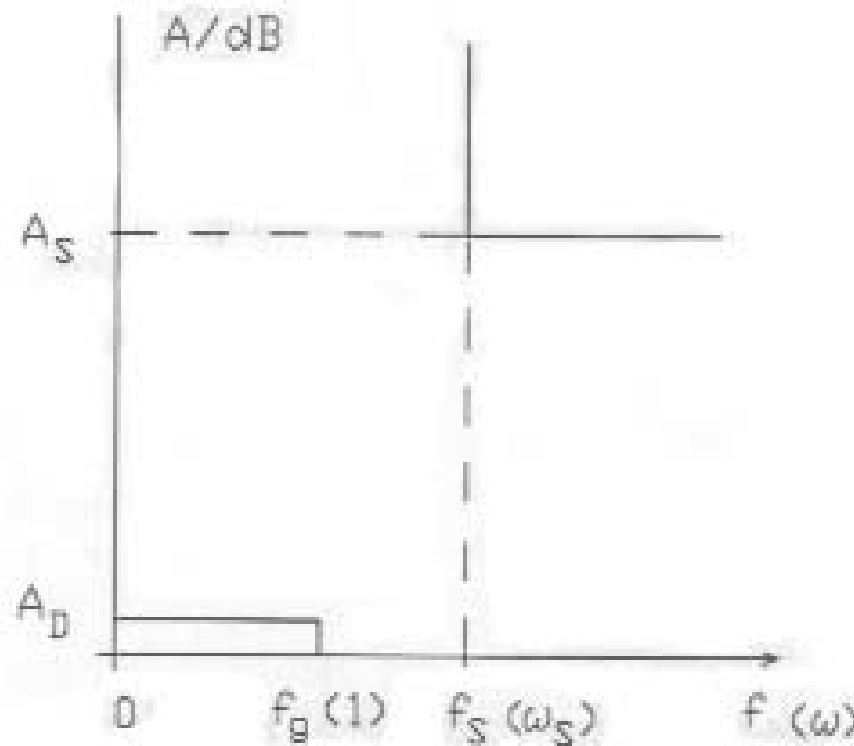
$A(\omega) > A_S$ für $f > f_S$ A_S : Sperrdämpfung, f_S : Sperrfrequenz

f, f_g, f_S stellen nicht normierte Frequenzwerte dar

$\omega, \omega_g, \omega_S$ stellen normierte Frequenzwerte dar mit $\omega_g = 1, \omega_S = f_S/f_g$



Der Dämpfungsverlauf $A(\omega)$ eines Tiefpasses





Die Butterworth-Tiefpässe

Charakteristische Funktion: $\psi(p) = \epsilon \cdot p^n$, d. h. $h(p) = \epsilon \cdot p^n$, $f(p) = 1$

Dämpfungsverlauf: $A(\omega) = 10 \lg(1 + \epsilon^2 \omega^{2n})$

Filtergrad:
$$n \geq \frac{1}{2} \frac{\lg \frac{10^{A_S/10} - 1}{10^{A_D/10} - 1}}{\lg \frac{f_S}{f_g}}$$

Nullstellen von $g(p)$ liegen auf einem Kreis mit dem Winkelabstand $\frac{\pi}{n}$

und dem Radius:
$$r = \sqrt[2n]{\frac{1}{10^{A_D/10} - 1}}$$



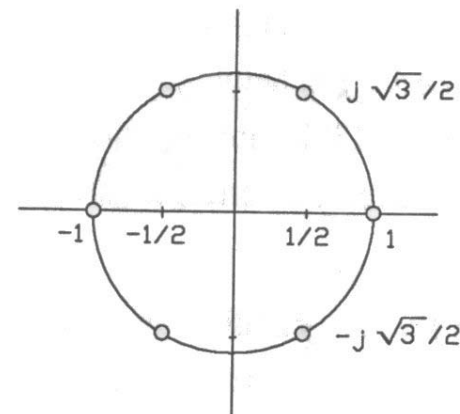
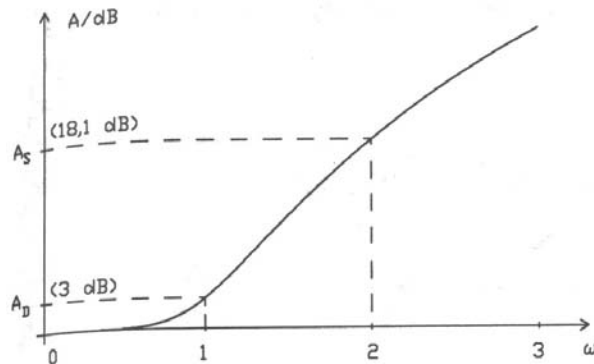
Die Butterworth-Tiefpässe



Merke: Die charakteristische Funktion von Butterworth-Tiefpässe besitzt nur Nullstellen, keine Polstellen! Die Nullstellen von $g(p)$ liegen auf einem Kreis:

Dämpfungsverlauf

Nullstellen von $g(p)g(-p)$



$$g(p) = (p + 1) \left(p + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(p + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + 2p + 2p^2 + p^3$$

$$S_{21}(p) = \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{1}{1+2p+2p^2+p^3}$$



Die Tschebyscheffpolynome



Parameterdarstellung der Tschebyscheffpolynome:

$$\omega = \cos \vartheta, \quad T_n(\omega) = \cos(n\vartheta) \quad \text{für } |\omega| \leq 1,$$

$$\omega = \cosh \vartheta, \quad T_n(\omega) = \cosh(n\vartheta) \quad \text{für } |\omega| \geq 1,$$

Rekursionsgleichung: $T_{n+1}(\omega) = 2\omega T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega)$, $n = 1, 2, 3\dots$

Startwert: $T_0(\omega) = 1$

Die ersten Polynome: $T_1(\omega) = \omega$

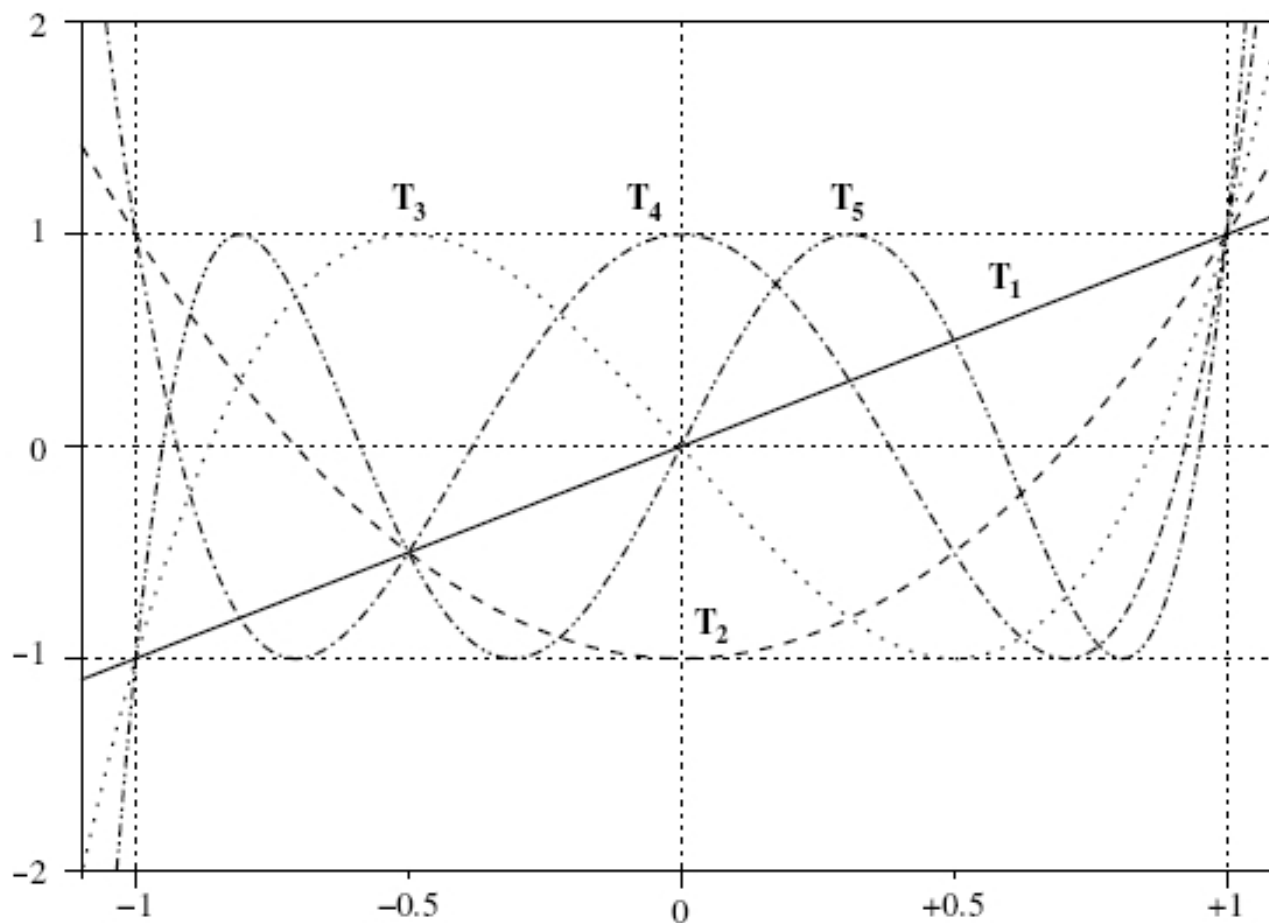
$$T_2(\omega) = 2\omega^2 - 1$$

$$T_3(\omega) = 4\omega^3 - 3\omega$$





Die Tschebyscheffpolynome





Die Tschebyscheff-Tiefpässe

Charakteristische Funktion: $\psi(p) = \epsilon \cdot T_n(p/j)$,

$$\text{d.h. } h(p) = \epsilon \cdot T_n(p/j), \quad f(p) = 1$$

Dämpfungsverlauf: $A(\omega) = 10 \lg(1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega))$

Filtergrad:

$$n \geq \frac{\operatorname{arcosh} \sqrt{\frac{10^{A_S/10} - 1}{10^{A_D/10} - 1}}}{\operatorname{arcosh} \frac{f_S}{f_g}}$$

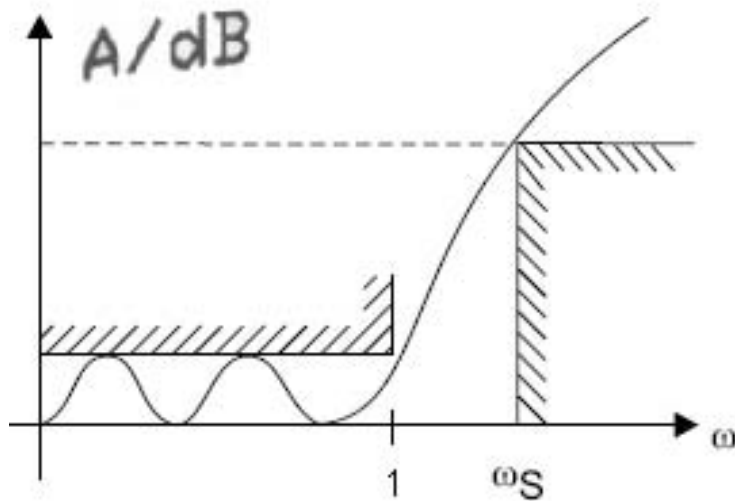


Die Tschebyscheff-Tiefpässe

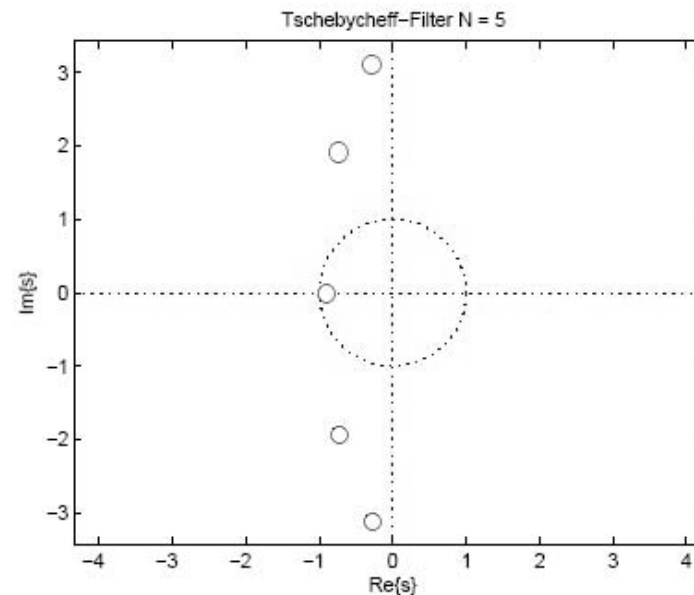


Merke: Die charakteristische Funktion von Tschebyscheff-Tiefpässen besitzt nur Nullstellen und keine Polstellen! Die Nullstellen von $g(p)$ liegen auf einer Ellipse:

Dämpfungsverlauf



Nullstellen von $g(p)$





Die Cauer-Tiefpässe

Kein Polynomtiefpaß

Normierung auf $\omega_c = \omega_g \cdot \omega_S = 1$

Dämpfungsverlauf im Durchlaß- und Sperrbereich im Tschebyscheff'schen Sinne approximiert

Charakteristische Funktion: $\psi(p) = \epsilon \cdot p \cdot \frac{p^2 + \omega_2^2}{\omega_2^2 + 1} \cdot \frac{p^2 + \omega_4^2}{\omega_4^2 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{p^2 + \omega_{n-1}^2}{\omega_{n-1}^2 + 1}$, *n ungerade*

$$\psi(p) = \epsilon \cdot \frac{p^2 + \omega_1^2}{\omega_1^2 p^2 + 1} \cdot \frac{p^2 + \omega_3^2}{\omega_3^2 p^2 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{p^2 + \omega_{n-1}^2}{\omega_{n-1}^2 p^2 + 1}, \text{ } n \text{ gerade}$$

$$\epsilon^2 = \sqrt{(10^{A_D/10} - 1)(10^{A_S/10} - 1)}$$





Die Cauer-Tiefpässe

Es gilt:
$$\psi(1/p) = \frac{1}{\psi(p)} = \frac{f(p)}{h(p)}$$

Zur Berechnung der ω_i benötigt man im wesentlichen folgende elliptische Integrale:

$$B(\Theta) = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \varphi}}$$

$$F(\Phi, \Theta) = \int_{\varphi=0}^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Theta \sin^2 \varphi}}$$

Der Abstand zwischen ω_g und $\omega = 1$ ist bestimmend für die Breite des Übergangsbereichs des Filters.

Definition des Modulwinkels:
$$\Theta = \arcsin \omega_g^2$$

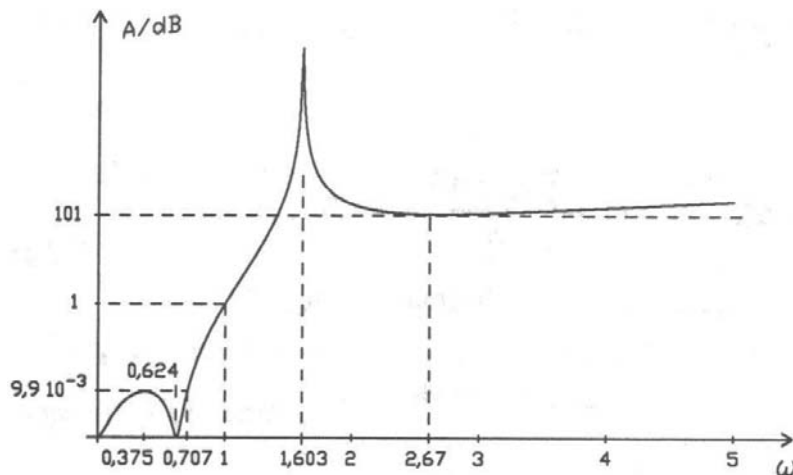




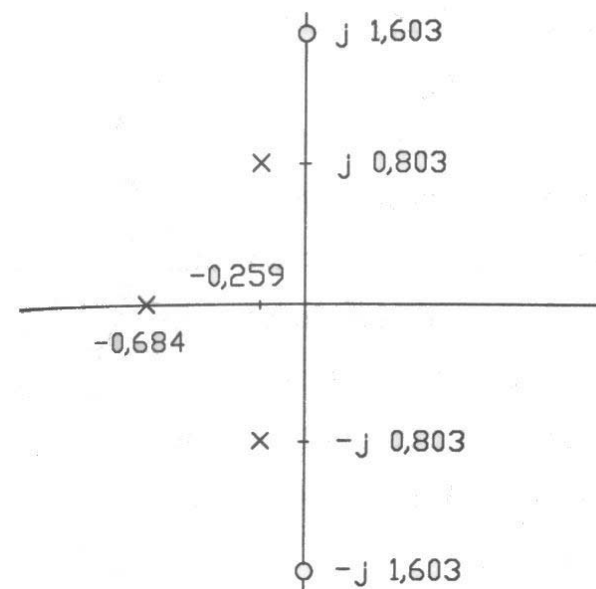
Die Cauer-Tiefpässe

Merke: Die charakteristische Funktion von Cauer-Tiefpässen besitzt Polstellen und Nullstellen! Die Nullstellen von $g(p)$ liegen auf einer Ellipse die Nullstellen von $f(p)$ liegen auf der $j\omega$ -Achse im Sperrbereich:

Dämpfungsverlauf



PN-Schema von $S_{21}(p) = \frac{f(p)}{g(p)}$





Die Cauer-Tiefpässe

Beispiel:

Cauer-Tiefpaß vom Grad $n = 3$,

Durchlaßdämpfung von $A_D = 0,177$ dB

Modulwinkel: $\Theta = 30^\circ$, $\omega_2 = 0,624$

$$\psi(p) = \epsilon \cdot \frac{p^2 + 0,3894}{0,3894p^2 + 1}$$

$$\epsilon = 2,058$$



Quellenangaben



Literatur:

- [1] O.Mildenberger: Entwurf Analoger und Digitaler Filter, Vieweg Verlag, 1992
- [2] U. Ahlvers: Nachrichtentechnikskript, HAW Hamburg, 2005

