Dehai Wang

Frequenztransformationen

Inhalt

1.Einleitung

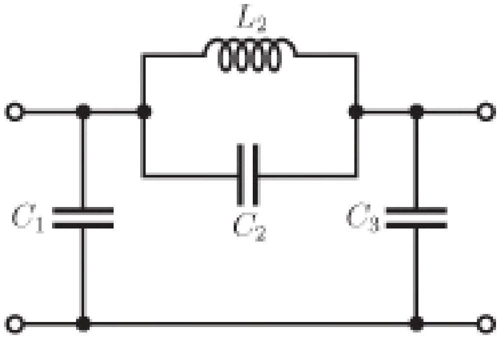
Aus den Bauelemente für Tiefpässe können durch Frequenz-transformationen die entsprechenden Bauelemente für :

- Hochpässe
- Bandpässe
- Bandsperren

berechnet werden.

2.Dämpfungsverlauf eines Tiefpasses

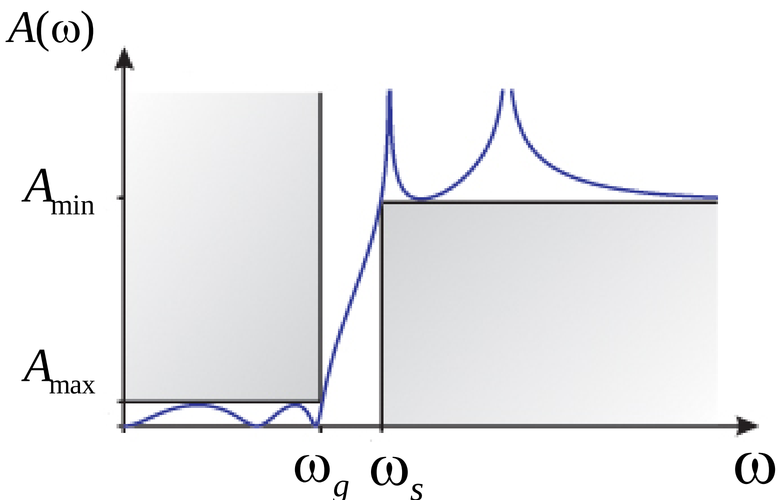
Beispiel: CAUER-Tiefpass 3.Ordnung



- Übertragungsfunktion: $$H^T(p) = \frac{4p^2+1}{p^3+2p^2+2p+1}$$

2.Dämpfungsverlauf eines Tiefpasses

- Dämpfungsverlauf:



- Frequenz-Normierung:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_g}$$

ω_g *ist Durchlassgrenzfrequenz*

3.Hochpass durch Frequenztransformation

Der Entwurf eines Hochpasses kann durch Frequenztrans-formation auf eine Tiefpassvorschrift zurückgeführt werden.

- Frequenz-Normierung: $\tilde{\Omega} = \dfrac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_g}$

  $\tilde{\omega}_g$ *ist Durchlassgrenzfrequenz des Hochpasses*

- Durchlassbereich: Tiefpass $|\Omega| \in [0,1]$

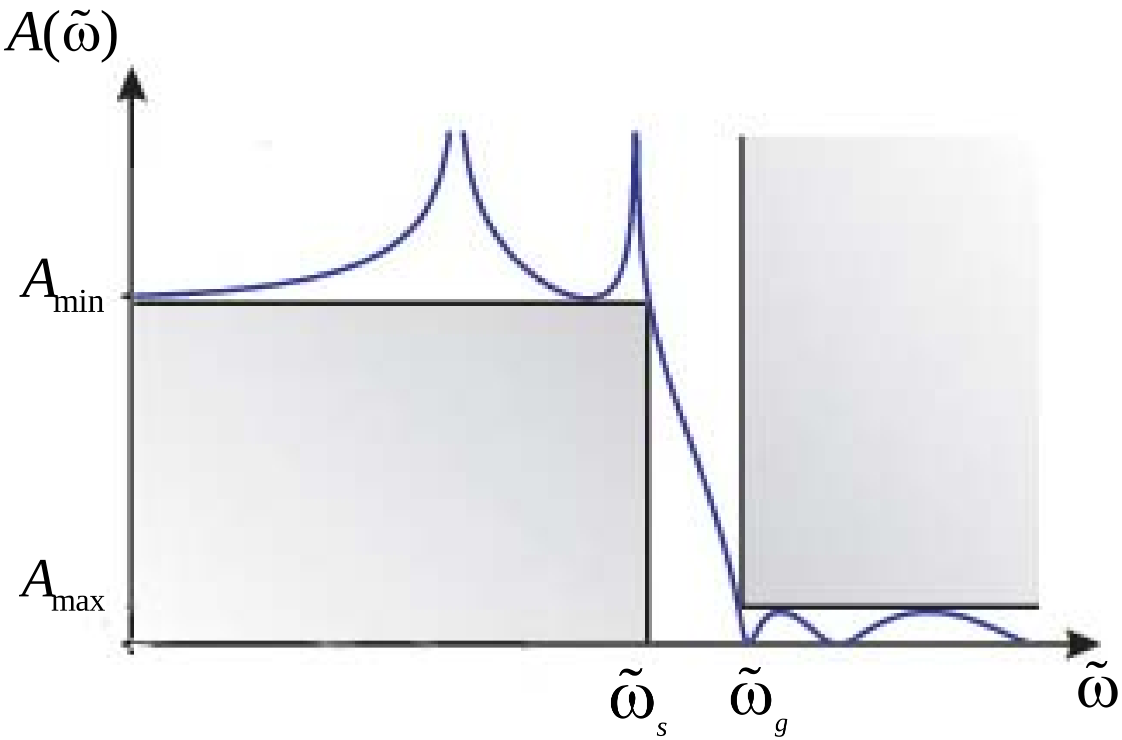
  Hochpass $|\tilde{\Omega}| \in [1,\infty)$

- Sperrbereich: Tiefpass $|\Omega| \in [\Omega_s,\infty)$

  Hochpass $|\tilde{\Omega}| \in [0,\tilde{\Omega}_s]$

3.Hochpass durch Frequenztransformation

- Dämpfungsverlauf eines CAUER-Hochpasses:



3.Hochpass durch Frequenztransformation

- Frequenzvariable: $\tilde{p} = \frac{1}{p}$
- Frequenzwerte: $\tilde{\Omega} = \frac{1}{\Omega}$
- Durchlassgrenzfrequenz: $\tilde{\Omega}_g = \frac{1}{\Omega_g} = 1$
- Sperrgrenzfrequenz: $\tilde{\Omega}_s = \frac{1}{\Omega_s}$

3.Hochpass durch Frequenztransformation

- Übertragungsfunktion: $H^H(\tilde{p}) = H^T(p = \frac{1}{\tilde{p}})$
- Für $p = j\Omega$ bzw. $\tilde{p} = j\tilde{\Omega}$ Folgt daraus

$$H^H(j\tilde{\Omega}) = H^T(\frac{1}{j\tilde{\Omega}}) = H^T(\frac{-j}{\tilde{\Omega}})$$

Dämpfung und Phase:

$$A^H(\tilde{\Omega}) = A^T(\frac{1}{\tilde{\Omega}}), B^H(\tilde{\Omega}) = -B^T(\frac{1}{\tilde{\Omega}})$$

4.Bandpass durch Frequenztransformation

Frequenzsymmetrische Bandpässe lassen sich ähnlich wie Hochpässe durch Frequenztransformation auf Tiefpässe zurückführen.

- Frequenz-Normierung: $\tilde{\Omega} = \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_0}$

  $\tilde{\omega}_0$ *ist Mittenfrequenz des Bandpasses*

- Durchlassbereich: Tiefpass $|\Omega| \in [0,1]$

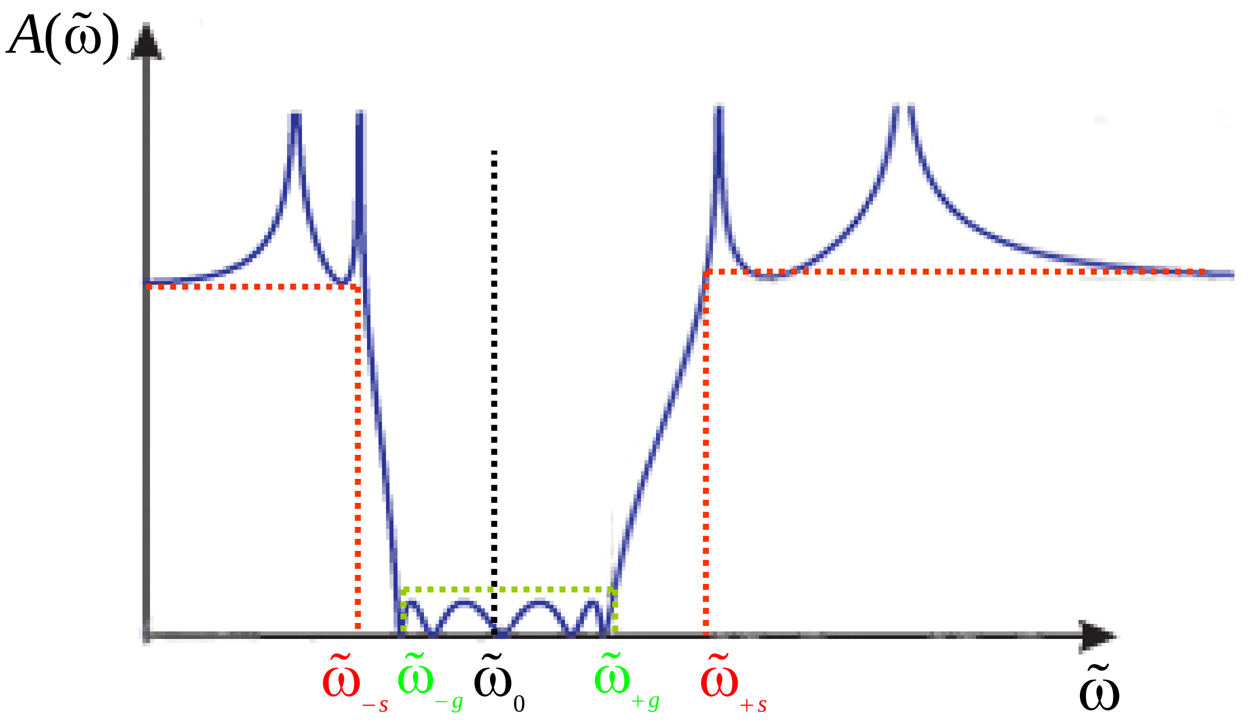
  Bandpass $|\tilde{\Omega}| \in [\tilde{\Omega}_{-g}, \tilde{\Omega}_{+g}]$

- Sperrbereich: Tiefpass $|\Omega| \in [\Omega_s, \infty)$

  Bandpass $|\tilde{\Omega}| \in [0, \tilde{\Omega}_{-s}] \cup [\tilde{\Omega}_{+s}, \infty)$

4.Bandpass durch Frequenztransformation

- Dämpfungsverlauf eines CAUER-Bandpasses:



4.Bandpass durch Frequenztransformation

- Frequenzvariable: $p = a(\tilde{p} + \frac{1}{\tilde{p}})$
- Frequenzwerte: $\Omega = a(\tilde{\Omega} - \frac{1}{\tilde{\Omega}})$ $\tilde{\Omega}_{\pm} = \sqrt{(\frac{\Omega}{2a})^2 + 1} \pm \frac{\Omega}{2a}$

dabei liegen die sich aus einem Frequenzpunkt Ω des Referenz-Tiefpasses ergebenden beiden Frequenzpunkte $\tilde{\Omega}_+ > 1$ und $\tilde{\Omega}_- < 1$ geometrisch symmetrisch zu 1, so dass gilt $\tilde{\Omega}_+ \tilde{\Omega}_- = 1$.

- Durchlassgrenzfrequenz: $\Omega_g = 1 = a(\tilde{\Omega}_{+g} - \tilde{\Omega}_{-g})$
- Sperrgrenzfrequenz: $\Omega_s = a(\tilde{\Omega}_{+s} - \tilde{\Omega}_{-s})$

4.Bandpass durch Frequenztransformation

- Kehrwert der relativen Bandbreite

$$a = \frac{1}{\tilde{\Omega}_{+g} - \tilde{\Omega}_{-g}}$$

- Wegen $\tilde{\Omega}_{+}\tilde{\Omega}_{-} = 1$

$$\Rightarrow (\tilde{\Omega}_{-g} - \tilde{\Omega}_{-s}) < (\tilde{\Omega}_{+s} - \tilde{\Omega}_{+g})$$

5.Bandsperre durch Frequenztransformation

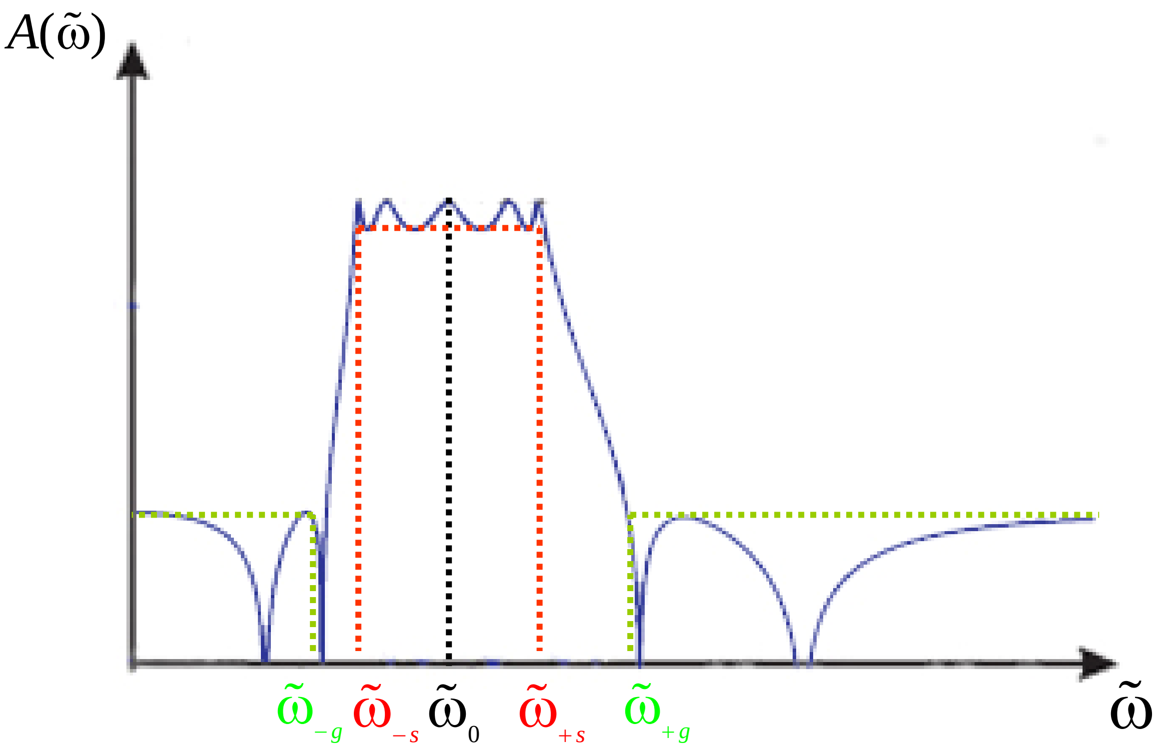
- Mittenfrequenz: $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\tilde{\omega}_{-g}\tilde{\omega}_{+g}} = \sqrt{\tilde{\omega}_{-s}\tilde{\omega}_{+s}}$
- Frequenz-Normierung: $\tilde{\Omega} = \dfrac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_0}$
- Durchlassbereich: Tiefpass $|\Omega| \in [0,1]$

  Bandsperre $|\tilde{\Omega}| \in [0,\tilde{\Omega}_{-g}] \cup [\tilde{\Omega}_{+g},\infty)$
- Sperrbereich: Tiefpass $|\Omega| \in [\Omega_s,\infty)$

  Bandsperre $|\tilde{\Omega}| \in [\tilde{\Omega}_{-s},\tilde{\Omega}_{+s}]$

5.Bandsperre durch Frequenztransformation

- Dämpfungsverlauf einer CAUER-Bandsperre:

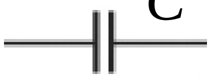
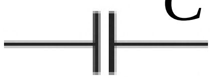


5.Bandsperre durch Frequenztransformation

- Frequenzvariable: $$p = \frac{1}{a(\tilde{p} + \frac{1}{\tilde{p}})}$$
- Frequenzwerte: $$\Omega = \frac{1}{a(\tilde{\Omega} - \frac{1}{\tilde{\Omega}})}$$ $$\tilde{\Omega}_{\pm} = \sqrt{(\frac{1}{2a\Omega})^2 + 1} \pm \frac{1}{2a\Omega}$$
- wie Bandpass ,hier gilt auch: $$\tilde{\Omega}_{+}\tilde{\Omega}_{-} = 1$$
- Durchlassgrenzfrequenz: $$\Omega_g = 1 = \frac{1}{a(\tilde{\Omega}_{+g} - \tilde{\Omega}_{-g})}$$
- Sperrgrenzfrequenz: $$\Omega_s = \frac{1}{a(\tilde{\Omega}_{+s} - \tilde{\Omega}_{-s})}$$

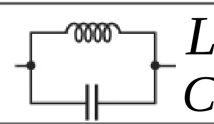
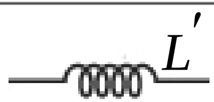
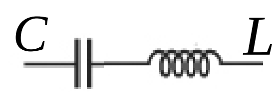
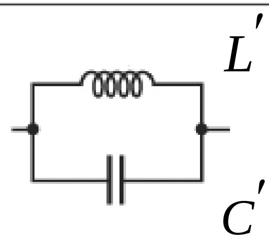
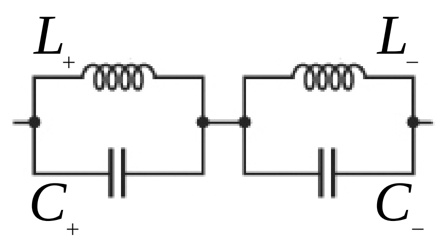
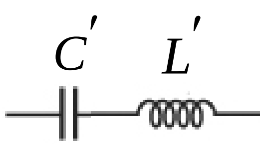
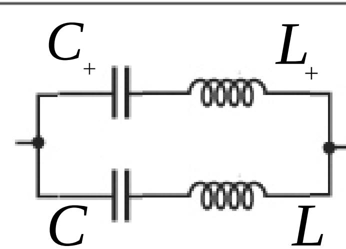
6.Bauelementetransformationen

- Tiefpass-Hochpass Bauelementetransformation

Referenz-Tiefpass	Hochpass	Größe
 C'	 L	$L = \frac{1}{C'}$
 L'	 C	$C = \frac{1}{L'}$

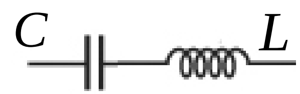
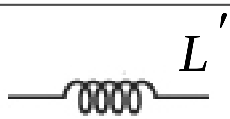
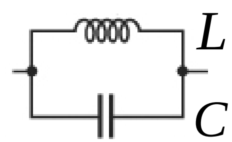
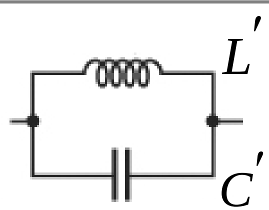
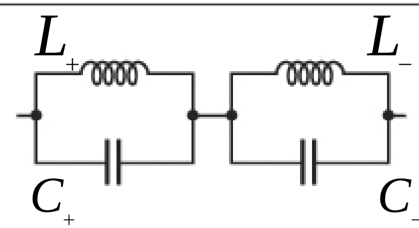
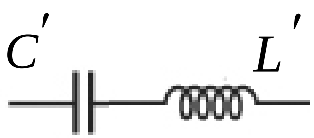
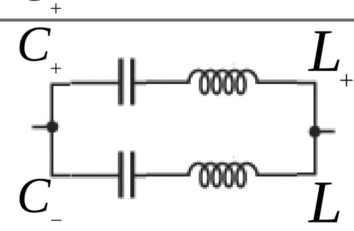
6.Bauelementetransformationen

- Tiefpass-Bandpass Bauelementetransformation

Referenz-Tiefpass	Bandpass	Größe
		$C = \frac{1}{L} = aC'$
		$L = \frac{1}{C} = aL'$
		$C_+ = \frac{1}{L_-} = aC'(1+\tilde{\Omega}_{-\infty}^2)$ $C_- = \frac{1}{L_+} = aC'(1+\tilde{\Omega}_{+\infty}^2)$
		$L_+ = \frac{1}{C_-} = aL'(1+\tilde{\Omega}_{-\infty}^2)$ $L_- = \frac{1}{C_+} = aL'(1+\tilde{\Omega}_{+\infty}^2)$

6.Bauelementetransformationen

- Tiefpass-Bandsperre Bauelementetransformation

Referenz-Tiefpass	Bandsperre	Größe
		$C = \frac{1}{L} = \frac{C'}{a}$
		$L = \frac{1}{C} = \frac{L'}{a}$
		$C_+ = \frac{1}{L_-} = \frac{a}{L'}(1+\tilde{\Omega}_{-\infty}^2)$ $C_- = \frac{1}{L_+} = \frac{a}{L'}(1+\tilde{\Omega}_{+\infty}^2)$
		$L_+ = \frac{a}{C_-} = \frac{a}{C'}(1+\tilde{\Omega}_{-\infty}^2)$ $L_- = \frac{a}{C_+} = \frac{a}{C'}(1+\tilde{\Omega}_{+\infty}^2)$

7.Literatur

[1] Rudolf Saal **:** Handbuch zum Filterentwurf**,**
AEG-Telefunken**,**1979

[2] Otto Mildenberger **:** Entwurf analoger und Digitaler Filter**,**
Vieweg **,**1992

[3] W.Rupprecht **:**Netzwerksynthese
Springer-Verlag**,**1972