*Monica Siepmann*

# Synthese mit Hilfe der kanonischen Faktorisierung

# Inhalt


1. Einleitung

2. Betriebskettenmatrix Matrix T

   2.1 Faktorisierung der T-Matrix
   2.2 Darstellung der T-Matrix

3. Mathemathische Formulierung der Problemstellung

4. Ergebnisse der Faktorisierung

   4.1 Ordnung der Elementarzellen
   4.2 Transformation in K und Z-Matrix
   4.3 Beispiele für Elementarzellen

5. Weitere Vereinfachungen

   5.1 Cauer-Transformation
   5.2 Anordnen der Elementarzellen

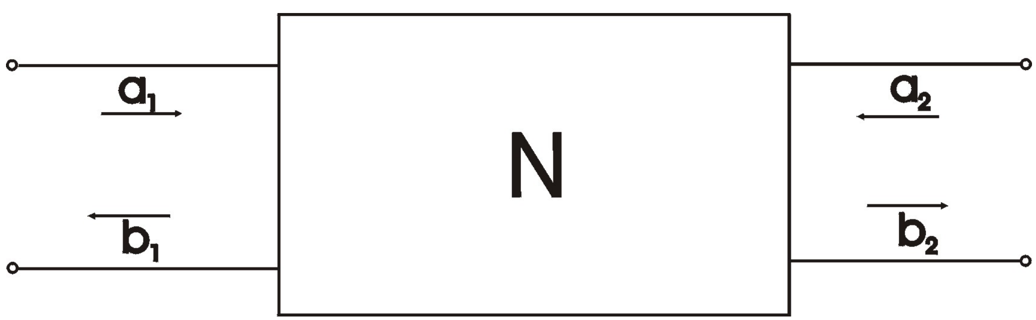
6. Literaturverzeichnis

# 1. Einleitung

## Kanonische Faktorisierung:

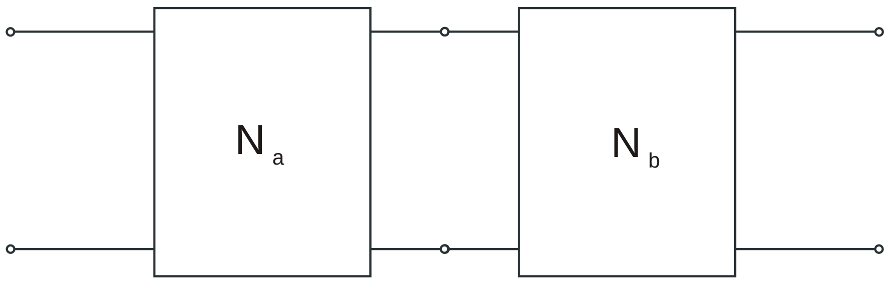
<u>Ziel:</u> Zerlegung eines Zweitores n-ten Grades in Elementarzellen mit genau n reaktiven Bauelementen
Jede Elementarzelle soll einen Dämpfungspol repräsentieren

<u>Weg:</u> Faktorisierung der Betriebskettenmatrix




$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

# 2.1 Faktorisierung der T-Matrix




$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T_a} \cdot \boldsymbol{T_b}$$

- T-Matrix wird durch beliebige Aufteilung der Dämpfungspole faktorisiert Mit den beiden neuen Matrizen wird das Verfahren dann fortgeführt

- Diese Zerlegung kann bis zu Zellen kleinster Ordnung (Elementarzellen) fortgeführt werden

# 2.2 Darstellung der T-Matrix durch kanonische Polynome

- Betrachtet werden nur verlustlose Zweitore
- für diese lässt sich die T-Matrix folgendermassen darstellen:
  (siehe auch Kapitel 2: kanonische Polynome)

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{f(p)} \begin{pmatrix} \sigma g_*(p) & h(p) \\ \sigma h_*(p) & g(p) \end{pmatrix}$$

für die gilt

$$gg_* = hh_* + ff_*$$

# T-Matrix der Kettenschaltung

es gilt: $T = T_a T_b$

Wird für beide Zweitore die oben genannte Darstellung der T-Matrix gewählt, so ergibt sich für das gesamte Zweitor

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{f}\begin{pmatrix} \sigma g_* & h \\ \sigma h_* & g \end{pmatrix} = \frac{1}{f_a f_b}\begin{pmatrix} \sigma_a g_{a*} & h_a \\ \sigma_a h_{a*} & g_a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_b g_{b*} & h_b \\ \sigma_b h_{b*} & g_b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f &= f_a f_b \\ \sigma &= \sigma_a \sigma_b \\ g &= g_a g_b + \sigma_a h_{a*} h_b \\ h &= h_a g_b + \sigma_a g_{a*} h_b \end{aligned}$$

# 3.1 mathematische Formulierung

<u>gegeben</u>

- drei reelle Polynome f(p),g(p),h(p)
  für die gilt $gg_* = hh_* + ff_*$
- Konstante $\sigma = +1$ oder -1
- zwei normierte Polynome $f_a(p)$ und $f_b(p)$
  für die gilt $f_a f_b = f$
- zwei ganze Zahlen $m_a$ und $m_b$
  die jeweils den Grad-Unterschied zwischen g und f angeben und für die gilt
  $m_a + m_b = m$

<u>gesucht</u>

zwei reelle Hurwitz Polynome $g_a(p)$ und $g_b(p)$
und zwei reelle Polynome $h_a(p)$ und $h_b(p)$

für die gilt

- $h_b = \sigma_a(hg_a - gh_a)/f_a f_{a*}$
- $g_{b*} = (g_* g_a - h_* h_a)/f_a f_{a*}$
- deg $g_a = n_a$, deg $g_b = n_b$
- $g_a g_{a*} = h_a h_{a*} + f_a f_{a*}$
- $g_b g_{b*} = h_b h_{b*} + f_b f_{b*}$

# 3.2 Lösungsansatz

Lösungsansatz:

allgemeine Polynome

$$g_a = A_0 + A_1 p + A_2 p^2 + \ldots$$
$$h_b = B_0 + B_1 p + B_2 p^2 + \ldots$$

Die Lösung wird hier nicht weiter ausgeführt
Vollständiger Lösungsweg siehe [1]

# Ordnung der Elementarzellen

Welcher Ordnung sind die Elementarzellen?

- Übertrager $n = 0$
- Pole bei Null oder im Unendlichen $n = 1$
- Pole bei imaginären Frequenzen $n = 2$
- konjugiert komplexe Pole $n = 4$

# Transformation in Z und K Matrix

Bauelemente lassen sich einfacher aus Impedanz- oder Kettenmatrix gewinnen

Transformation von T in K und Z:

| $\sigma = 1$ | $\sigma = -1$ |
|---|---|
| $\boldsymbol{K} = \frac{1}{f}\begin{pmatrix} g_e + h_e & g_o + h_o \\ g_o - h_o & g_e - h_e \end{pmatrix}$ | $\boldsymbol{K} = \frac{1}{f}\begin{pmatrix} g_o + h_o & g_e + h_e \\ g_e - h_e & g_o - h_o \end{pmatrix}$ |
| $\boldsymbol{Z} = \frac{1}{g_o - h_o}\begin{pmatrix} g_e + h_e & f_* \\ f & g_e - h_e \end{pmatrix}$ | $\boldsymbol{Z} = \frac{1}{g_e - h_e}\begin{pmatrix} g_o + h_o & f \\ f_* & g_o - g_o \end{pmatrix}$ |

mit

$$g_e = (g + g_*)/2; \quad h_e = (h + h_*)/2$$
$$g_o = (g - g_*)/2; \quad h_o = (h - h_*)/2$$

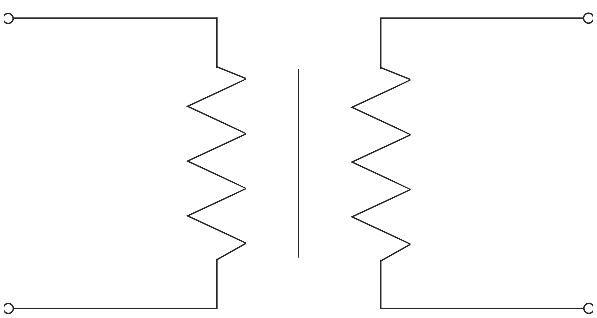
# Elemente der Ordnung 0

Konstante T-Matrix

f $= 1$; g $= \alpha$; h$=\beta$; mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

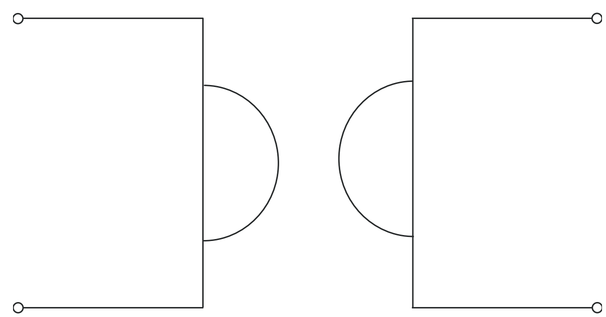
$\sigma$=1:

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 0 \\ 0 & \alpha - \beta \end{pmatrix}$$



$\sigma$=-1:

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha + \beta \\ \alpha - \beta & 0 \end{pmatrix}$$



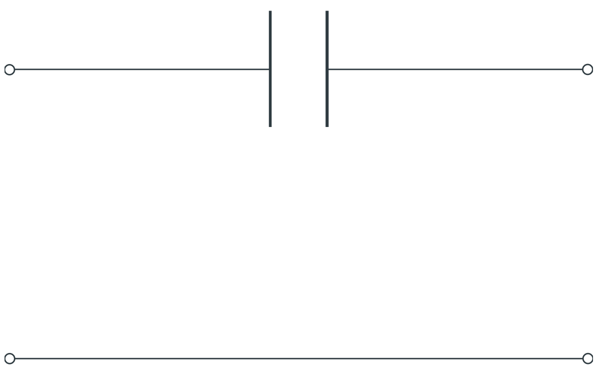
# Elemente der Ordnung 1

$$f = p; \qquad g = p + G_0; \quad h = H_0; \qquad \text{mit } H_0 = \pm G_0$$

sei $\sigma = -1$

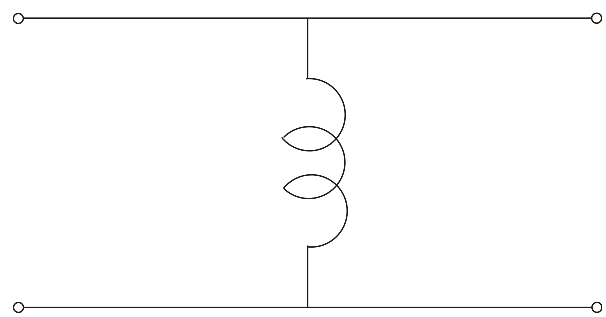
$H_0 = G_0$:

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{pG_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$H_0 = -G_0$:

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{pG_0} & 1 \end{pmatrix}$$



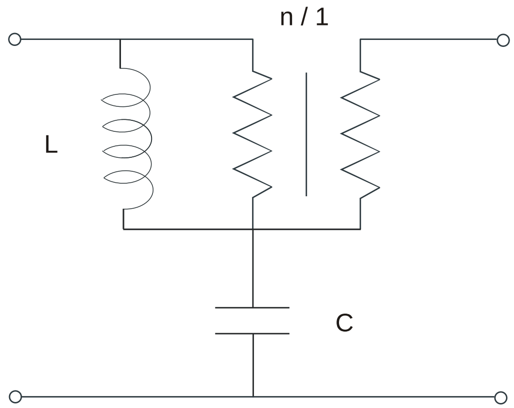
# Elemente der Ordnung 2

$$f = p^2 + F_0 \ ; \quad g = G_2 p^2 + G_1 p + G_0 \ ; \quad h = H_2 p^2 + H_1 p$$

$$\text{mit } G_0 = F_0; \quad G_2^2 = H_2^2 + 1; \quad G_1^2 = H_1^2 + 2(G_2 - 1)F_0$$

Element für $\sigma = 1$; $H_1 \neq G_1$:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{1}{(G_1 - H_1)p} \begin{pmatrix} (G_2 + H_2)p^2 + F_0 & p^2 + F_0 \\ p^2 + F_0 & (G_2 - H_2)p^2 + F_0 \end{pmatrix}$$

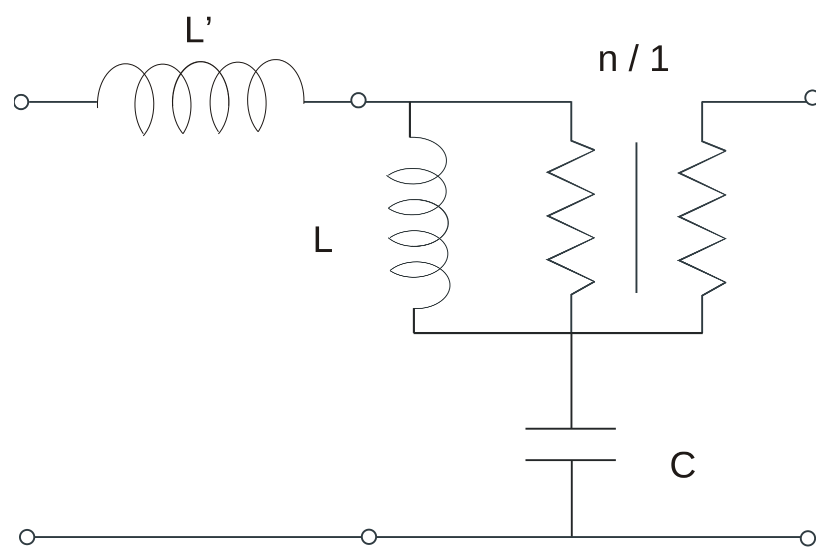



$$C = \frac{G_1 - H_1}{F_0}$$
$$L = \frac{G_2 + H_2}{G_1 - H_1}$$
$$n = LCF_0$$

# 5.1 Cauer-Transformation

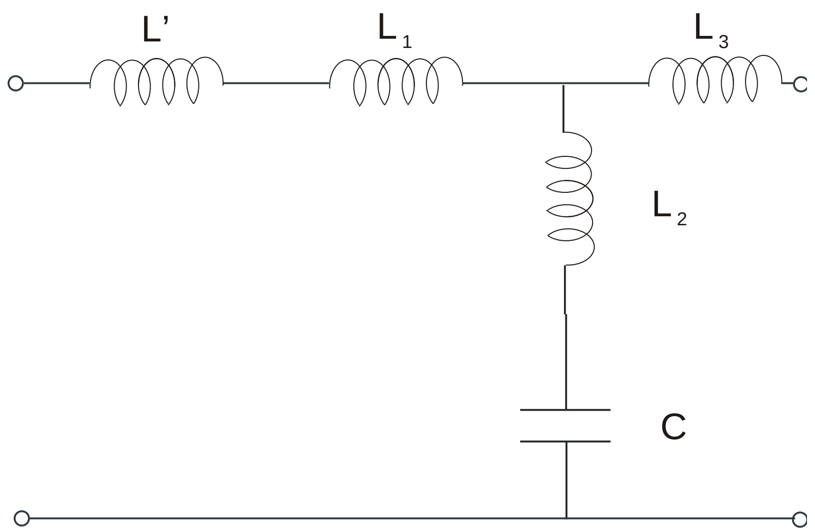
Ein idealer Transformator bereitet in der Herstellung große Probleme.
Es soll daher eine Ersatzschaltung gefunden werden, die ohne dieses Bauelement auskommt

Cauer-Transformation:
sei die folgende Anordnung von Elementarzellen gegeben



# 5.1 Cauer-Transformation

Es lässt sich hierfür die folgende Ersatzschaltung angeben



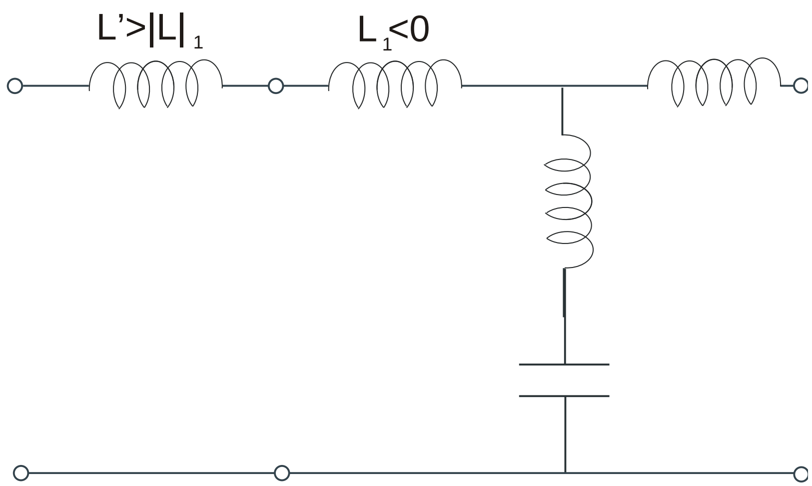

$$L_1 = L(1 - \frac{1}{n})$$
$$L_2 = \frac{L}{n}$$
$$L_3 = -\frac{L}{n}(1 - \frac{1}{n})$$

Diese Darstellung hat ein entscheidendes Problem:

Es könnten sich negative Bauelement-Werte ergeben

# 5.2 Anordnen der Elementarzellen

Es wird also ein weiteres Bauelement benötigt, dass die negative Spule kompensiert
Dieses muss nun einen grösseren positiven Wert aufweisen als das negative




Die Reihenfolge der Abspaltung der Elemente ist beliebig. Man kann daher die Bauelemente so anordnen, dass die geforderte Spule genau neben dem negativen Bauelement liegt, sofern eine solche in der Schaltung vorkommt.

# Literaturverzeichnis

Literatur

[1] Cascade Synthesis of lossless two-ports by transfer matrix factorisation
Alfred Fettweis

[2] Optimierung von Filtern, insbesondere von Wellendigitalfiltern...
K.-A.Owenier, Dissertation, Bochum 1977

[3] Theorie elektrischer Schaltungen
Alfred Fettweis, Vorlesungsskript, Bochum 1999