# Nachrichtentechnik

http://www.dks.rub.de

Prof. Dr.-Ing. Aydin Sezgin
M. Sc. Soheyl Gherekhloo

WS 2011-2012
Ruhr-Universität Bochum

# Lösung für Klausur WS 2011-2012

## Lösung Aufgabe A

$H_D(x) = \sum_{i=1}^{m} p_X(x_i)\log_D(\frac{1}{p_X(x_i)}) = \sum_{i=1}^{m} \log_D\left[(\frac{1}{p_X(x_i)})^{p_X(x_i)}\right] = \log_D\left[\prod_{i=1}^{m}(\frac{1}{p_X(x_i)})^{p_X(x_i)}\right]$

$\Rightarrow D^{H_D(X)} = \prod_{i=1}^{m}(\frac{1}{p_X(x_i)})^{p_X(x_i)}$

hängt nicht von D ab

(a) $2^{H_2(X)} = 3^{H_3(X)}$ (ergibt sich aus obiger Rechnung)

(b) $2^{I_2(X;Y)} = 3^{I_3(X;Y)}$ da $D^{I_D(X;Y)} = D^{H_D(X)-H_D(X|Y)} = \frac{D^{H_D(X)}}{H_D(X|Y)}$ hängt nicht von D ab

(c) $3^{H_2(X)} = 2^{H_3(X)}$, da $3^{H_2(X)} = \frac{2^{H_2(X)}}{2^{H_2(X)}}3^{H_2(X)} = 2^{H_2(X)}(\frac{3}{2})^{H_2(X)} = 3^{H_3(X)}(\frac{3}{2})^{H_2(X)} = \frac{2^{H_3(X)}}{2^{H_3(X)}}3^{H_3(X)}(\frac{3}{2})^{H_2(X)}$

$= 2^{H_3(X)}(\frac{3}{2})^{H_3(X)}(\frac{3}{2})^{H_2(X)} = 2^{H_3(X)}\underbrace{(\frac{3}{2})^{H_3(X)+H_2(X)}}_{\geq 1}$

Gleichheit dann und nur dann, wenn $H(x) = 0$

(d) Für eine gegebene Kardinalität maximiert die Gleichverteilung die Entropie. Im Umkehrschluss gilt: Für eine gegebene Entropie minimiert die Gleichverteilung die Kardinalität.
Entropie einer Gleichverteilung:
$H_D(U) = \log_D(|U|)$

$\rightarrow |U| = D^{H_D(U)}$
$\rightarrow H_3(X) = 2 \rightarrow |X| = 3^2 = 9$
$\Rightarrow$ Kleine Kardinalität von $|X| = 9$ und wird mit einer Gleichverteilung erreicht.

(e) Es gilt $I(X;Y) \geq 0$ $H(X) \geq 0$
weiterhin

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) \leq H(X) \\ &= H(Y) - H(Y|X) \leq H(X) \end{aligned}$$

$\Rightarrow 0 \leq I_D(X;Y) \leq \min(H_D(X),\ H_D(Y))$

Mit $I_2(X;Y) = 1$ folgt

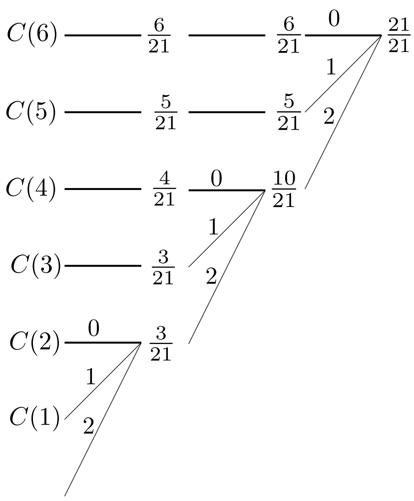
$H_2(X) \geq 1,\ H_2(Y) \geq 1$
$\Rightarrow m \geq 2,\ n \geq 2$
$\Rightarrow m + n \geq 4$

(f) $H_3(X) = 2 \Rightarrow m \geq 9$ (Argumentation wie oben)
$I_2(X;Y) = 1 \Rightarrow m \geq 2,\ n \geq 2$
$\Rightarrow m + n \geq 9 + 2 = 11$

(g) $H_3(X) = 2 \Rightarrow m \geq 9$
$H_3(Y) = 2 \Rightarrow n \geq 9$
$I_2(X;Y) = 1 \Rightarrow m \geq 2,\ n \geq 2$
$\Rightarrow m + n \geq 9 + 9 = 18$

## Lösung Aufgabe B

(a) Huffman Code




$C(6) = 0$
$C(5) = 1$
$C(4) = 20$
$C(3) = 21$
$C(2) = 220$
$C(1) = 221$

$\overline{L} = 1 \cdot \frac{6}{21} + 1 \cdot \frac{5}{21} + 2 \cdot \frac{4}{21} + 2 \cdot \frac{3}{21} + 3 \cdot \frac{2}{21} + 3 \cdot \frac{1}{21} = \frac{34}{21}$

Shannon Code:

$l(6) = \lceil \log_3(\frac{21}{6}) \rceil = 2 \rightarrow C(6) = 00$
$l(5) = \lceil \log_3(\frac{21}{5}) \rceil = 2 \rightarrow C(6) = 01$
$l(4) = \lceil \log_3(\frac{21}{4}) \rceil = 2 \rightarrow C(6) = 02$

$l(3) = \lceil \log_3(\frac{21}{3}) \rceil = 2 \rightarrow C(6) = 10$
$l(2) = \lceil \log_3(\frac{21}{2}) \rceil = 3 \rightarrow C(6) = 110$
$l(1) = \lceil \log_3(\frac{21}{1}) \rceil = 3 \rightarrow C(6) = 111$

$\overline{L} = 2 \cdot \frac{6}{21} + 2 \cdot \frac{5}{21} + 2 \cdot \frac{4}{21} + 2 \cdot \frac{3}{21} + 3 \cdot \frac{2}{21} + 3 \cdot \frac{1}{21} = \frac{45}{21}$

(b) Wir fangen im Code-Baum unten an. Im Huffman Code kombinieren wir zunächst die kleisten Wahrscheinlichkeiten $p_3 + p_4$ in ein Symbol mit WS $p_3 + p_4$.
Nächster Schritt: Hier gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder werden
- $p_2 + p_2$ kombinert oder
- $p_2$ mit $p_3 + p_4$

Allerdings resultiert nur des Letzere in ein $l_1 = 1$
Eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit dies geschieht ist damit $p_3 + p_4 \leq p_1$
Mit $\overline{L} = 2$ folgt
$2 = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3(p_3 + p_4)$ und $1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$
Mit $p_2 = \frac{1}{5} \Rightarrow 2 = p_1 + \frac{2}{5} + 3(1 - p_1 - \frac{1}{5})$
$\Rightarrow 2p_1 = 1 + \frac{2}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$
$\Rightarrow p_1 = \frac{2}{5}$ da $p_2 \geq p_3 \geq p_4 \Rightarrow p_3 = p_4 = \frac{1}{5}$ Ein kleines $p_1$ ist nicht möglich.

## Lösung Aufgabe C

$p_X(0) = p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(0,1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$p_X(1) = p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(1,1) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Analog
$p_Y(0) = \frac{1}{4}$ $p_Y(1) = \frac{3}{4}$

(a) Da $\epsilon = 0$ und die verteilung nicht gleichverteilt ist, folgt: Die empirische Verteilung muss exakt der PMF sein
$\Rightarrow$ typische Sequenz
$A_0^4(X) = \{0001, 0010, 0100, 1000\}$
$A_0^4(Y) = \{1110, 1101, 1011, 0111\}$

(b) $A_0^4(X,Y) = \{(0001, 1101), (0001, 1011), (0001, 0111), (0010, 1110), (0010, 1011), (0010, 1011), (0100, 1110), (0100, 1101), (0100, 0111), (1000, 1110), (1000, 1101), (1000, 1011)\}$
$\Rightarrow (0001, 1101) \in A_0^4(X,Y)$ $(0001, 1110) \notin A_0^4(X,Y)$

(c) Wahrscheinlichkeit, daß $x_1x_2x_3x_4 \in A_0^4(x)$
$p(x_1x_2x_3x_4 \in A_0^4(X)) =$
$p_{X_1X_2X_3X_4}(0001) + p_{X_1X_2X_3X_4}(0010) + p_{X_1X_2X_3X_4}(0100) + p_{X_1X_2X_3X_4}(1000) = 4 \cdot \left[ (\frac{3}{4})^3 \cdot \frac{1}{4} \right] = \frac{27}{64}$

(d) Wahrscheinlichkeit, daß $x_1x_2x_3x_4 \in A_0^4(x)$
$p(x_1x_2x_3x_4 \in A_0^4(x)) =$
$p_{X_1X_2X_3X_4}(0001) + p_{X_1X_2X_3X_4}(0010) + p_{X_1X_2X_3}(001) + p_{X_1X_2X_3}(010) = 2 \cdot \left[ (\frac{3}{4})^2 \cdot \frac{1}{4} \right] = \frac{9}{32}$

(e) Wahrscheinlichkeit, daß $x_1x_2x_3x_4 \in A_0^4(x)$
$p(x_1x_2x_3x_4 \in A_0^4(x)) =$
$p_{X_1X_2X_3X_4}(0001) + p_{X_1X_2X_3X_4}(0010) + p_{X_1X_2X_3X_4}(0100) + p_{X_1X_2X_3X_4}(1000) = 4 \cdot \left[ (\frac{1}{4})^3 \cdot \frac{1}{4} \right] = \frac{3}{64}$

## Lösung Aufgabe D

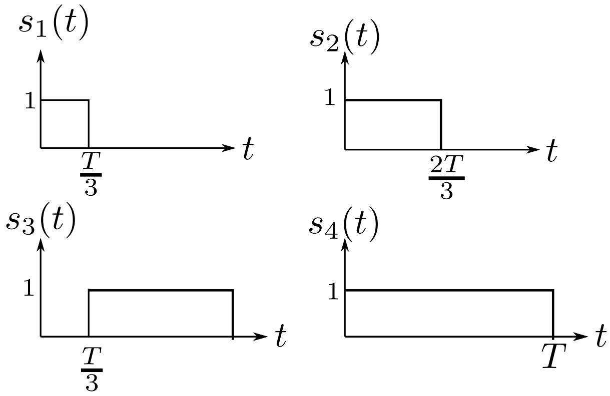
(a) $y_i = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(t)\psi_i(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t')dt'\psi_i(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{k} x_j\psi_j(t')\right] h(t-t')dt'\psi_i(t)dt$

$= \sum_{j=1}^{k} x_j \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-t')\psi_j(t')\psi_i(t)dt'dt}_{h_{j,i}} = \sum_{j=1}^{k} x_j h_{j,i}$

(b) $y(T) = \sum_{i=1}^{k} y_i\psi_i(T) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_j h_{j,i}\psi_i(T) = [\psi_1(T)\ \psi_2(T)...\psi_k(T)] \cdot \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} & \dots & h_{k1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{1k} & \dots & \dots & h_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$

(c) $y(T) = \boldsymbol{h}^T \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}^T(\boldsymbol{g}+\boldsymbol{w})$
Rauschleistung:
$E\left[\boldsymbol{h}^T \cdot \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w}^H \cdot \boldsymbol{h}\right] = \|\boldsymbol{h}^2\| \cdot \frac{N_o}{2}$
Signalleistung:
$(\boldsymbol{h}^T \cdot \boldsymbol{g})^2 \leq \|\boldsymbol{h}^2\| \cdot \|\boldsymbol{g}^2\|$
mit Gleichheit, wenn $\boldsymbol{g} = C \cdot \boldsymbol{h}$ erfüllt ist. ($C$ beliebige Konstante $C \neq 0$)

## Lösung Aufgabe E




$E_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 dt = \int\limits_{0}^{\frac{T}{3}} 1dt = t|_0^{\frac{T}{3}} = \frac{T}{3}$

$\Rightarrow \phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\frac{T}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{T}} \cdot s_1(t)$

$s_{31} = \int\limits_0^T s_3(t)\phi_1(t)dt = 0$

$\Rightarrow s_3'(t) = s_3(t) - s_{31}\cdot\phi_1(t) = s_3(t)$

$E_3 = \int\limits_0^T |s_3(t)|^2 dt = t|_{\frac{T}{3}}^{T} = \frac{2}{3}T$

$\Rightarrow \phi_3(t) = \frac{s_3(t)}{\sqrt{\frac{2}{3}T}} = \sqrt{\frac{3}{2T}} \cdot s_3(t)$

$s_{21} = \int\limits_0^T s_2(t)\phi_1(t)dt = \sqrt{\frac{3}{T}} t|_0^{\frac{T}{3}} = \sqrt{\frac{T}{3}}$

$s_{23} = \int\limits_0^T s_2(t)\phi_3(t)dt = \sqrt{\frac{3}{T}} t|_{\frac{T}{3}}^{\frac{2T}{3}} = \sqrt{\frac{T}{6}}$

$\Rightarrow s_2'(t) = s_2(t) - \sqrt{\frac{T}{3}}\phi_1(t) - \sqrt{\frac{T}{6}}\phi_3(t) = s_2(t) - s_1(t) - \sqrt{\frac{1}{2}}\cancel{\sqrt{\frac{T}{3}}} \cdot \cancel{\sqrt{\frac{3}{T}}}\frac{1}{\sqrt{2}}s_3(t) = s_2(t) - s_1(t) - \frac{1}{2}s_3(t)$

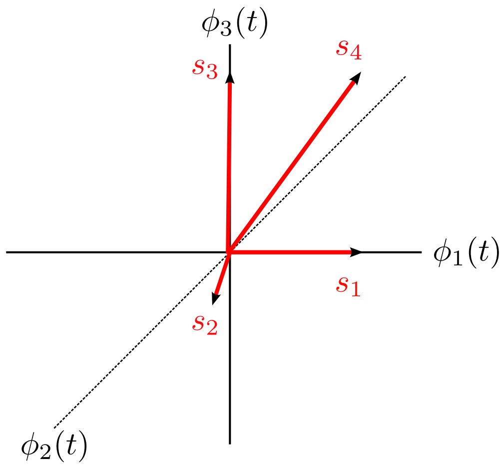
$= \begin{cases} 0 & 0 \le t \le \frac{T}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{T}{3} < t \le \frac{T \cdot 2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{T \cdot 2}{3} < t < T \end{cases}$

$E_2 = \int\limits_0^T |s_2'(t)|^2 dt = \frac{1}{4} \cdot t|_{\frac{T}{3}}^{2\frac{T}{3}} + \frac{1}{4} \cdot t|_{\frac{T \cdot 2}{3}}^{T} = \frac{1}{4}\frac{T}{3} + \frac{1}{4}\frac{T}{3} = \frac{1}{2}\frac{T}{3} = \frac{T}{6}$

$\Rightarrow \phi_2(t) = \frac{s_2'(t)}{\sqrt{\frac{T}{6}}} = \sqrt{\frac{6}{T}} \cdot s_2'(t)$

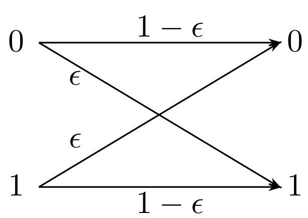
$\Rightarrow s_2(t) = \sqrt{\frac{T}{6}} \cdot \phi_2(t) + \sqrt{\frac{T}{3}} \cdot \phi_1(t) + \sqrt{\frac{T}{6}} \cdot \phi_3(t)$

$\Rightarrow s_4(t) = \sqrt{\frac{T}{3}} \cdot \phi_1(t) + \sqrt{\frac{2T}{3}} \cdot \phi_3(t)$




## Lösung Aufgabe F

(a) $p_{Y|X}(y|x) = p\{Y = y|X = x\} = p\{X \oplus Z = y|X = x\}$
$= p\{Z = x \oplus y|X = x\} \Rightarrow$
$p_{Y|X}(0,0) = p_Z(0 \oplus 0) = p_Z(0) = 1 - \epsilon$
$p_{Y|X}(0,1) = p_Z(0 \oplus 1) = p_Z(1) = \epsilon$
$p_{Y|X}(1,0) = p_Z(1 \oplus 0) = p_Z(1) = \epsilon$
$p_{Y|X}(1,1) = p_Z(1 \oplus 1) = p_Z(0) = 1 - \epsilon$




(b) $p\{x \neq y\} = p_{X|Y}(0,1) + p_{X|Y}(1,0) = p_{Y|X}(1,0)p_X(0) + p_{Y|X}(0,1)p_X(1) = \epsilon(1-p) + \epsilon p = \epsilon$

(c) Wenn $p\{x \neq y\} = \frac{1}{2}$ ist der schlimmste Fall, da keine sinnvolle Übertragung möglich ist.
da kein BSC
$C = 1 - H(p, 1-p) = 1 - 1 = 0$
$p = \frac{1}{2}$.
Für Übertragung unbrauchbar aber für verschlüsselung (one time pad) sehr nützlich.