Nachrichtentechnik

Digital Communication Systems

http://www.dks.rub.de

Prof. Dr.-Ing. Aydin Sezgin
M. Sc. Soheyl Gherekhloo

SS 2012
Ruhr-Universität Bochum

Lösung für Klausur SS 2012

Lösung Aufgabe A

1. $H(A,B,C,S) = H(A) + H(B|A) + \underbrace{H(S|A,B)}_{=0} + \underbrace{H(C|A,B,S)}_{=0} = H(A) + H(B) = 2H(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$
   $= -2\left[\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\log\frac{3}{4}\right]$
2. $H(A,C|S) = \underbrace{H(A|S) + H(C|A,S)}_{=0} = p_S(0)\underbrace{H(A|S=0)}_{=0} + p_S(1)H(A|S=1) + p_S(2)\underbrace{H(A|S=2)}_{=0}$
   Berechung von p_S; p_{A+S}
   $p_{A,B,S,C}(0,0,0,1) = p_A(0)p_{B|A}(0|0)\underbrace{p_{S|B,A}(0|0,0)}_{=1}\underbrace{p_{C|S,A,B}(1|0,0,0)}_{=1} = p_A(0)p_B(0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

   $p_{A,B,S,C}(0,1,1,0) = p_A(0)p_B(1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

   $p_{A,B,S,C}(1,1,2,1) = p_A(1)p_B(1) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

   $$S = \begin{cases} 0 & \sim \frac{3}{16} \triangleq p_{A,B,S,C}(0,0,0,1) \\ 1 & \sim \frac{10}{16} \triangleq p_{A,B,S,C}(0,1,1,0) + p_{A,B,S,C}(1,0,1,0) \\ 2 & \sim \frac{3}{16} \triangleq p_{A,B,S,C}(1,1,2,1) \end{cases}$$

   $p_{A|S}(A|S) = \frac{p_{A,B,S,C}(A,B,S,C)}{p_S(S)\underbrace{p_{B,S,A}(B|S,A)}_{=1}\underbrace{p_{C,S,A}(B|S,A,B)}_{=1}}$
   $\Rightarrow$
   $p_{A|S}(0|1) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{10}{16}} = \frac{1}{10}$

   $p_{A|S}(1|1) = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{10}{16}} = \frac{9}{10}$
   $\Rightarrow H(A,C|S) = \frac{10}{16}H(\frac{1}{10}, \frac{9}{10})$
3. $I(A;B) = 0$
   $I(C;B) = I(A;C)$ aufgrund Symmetrie
   $\Rightarrow I(A;C) = H(A) - H(A|C) = H(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) - p_C(0)H(A|C=0) - p_L(1)p(A|C=1)$

$$C = \begin{cases} 0 & \sim \frac{10}{16} \\ 1 & \sim \frac{6}{16} \end{cases}$$

$$p_{A|C} = \frac{p_{A,B,S,C}(A,B,S,C)}{p(C)\underbrace{p(S|A,C)}_{=1}\underbrace{p(B|S,A,C)}_{=1}}$$

$\Rightarrow$

$$p_{A|C}(0|0) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{10}{16}} = \frac{1}{10}$$

$$p_{A|C}(1|0) = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{10}{16}} = \frac{9}{10}$$

$p_{A|C}(0|0) + p_{A|C}(1|0) = 1$ richtig

$$p_{A|C}(0|1) = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{6}{16}} = \frac{1}{2}$$

$$p_{A|C}(1|1) = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{6}{16}} = \frac{1}{2}$$

$p_{A|C}(0|1) + p_{A|C}(1|1) = 1$ richtig

$$\Rightarrow I(A;C) = H(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}) - \tfrac{10}{16}H(\tfrac{9}{10}, \tfrac{1}{10}) - \underbrace{\frac{6}{16}\underbrace{H(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}_{=1}}_{\frac{3}{8}}$$

4. $I(A;S|C) = H(A|C) - H(A|S,C) = H(A|C) - H(A|S) = \frac{5}{8}H(\frac{9}{10}, \frac{1}{10}) + \frac{3}{8} - \frac{5}{8}H(\frac{9}{10}, \frac{1}{10}) = \frac{3}{8}$
5. $I(A;B|C) = H(A|C) - H(A|B,C) = H(A|C) = \frac{3}{8} + \frac{5}{8}H(\frac{1}{10}, \frac{9}{10})$
6. $I(C;S|A) = H(C|A) - H(C|S,A) = H(C|A) = p_A(0)H(C|A=0) + p_A(1)H(C|A=1)$

$$p_{C|A} = \frac{p_{A,B,C,S}}{p(A)\underbrace{p(S|A,C)}_{=1}\underbrace{p(B|S,A,C)}_{=1}}$$

$$p_{C|A}(0|0) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$p_{C|A}(1|0) = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{3 \cdot 4}{16} = \frac{3}{4}$$

$$p_{C|A}(1|1) = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 16} = \frac{1}{4}$$

$$p_{C|A}(0|1) = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{9 \cdot 4}{3 \cdot 16} = \frac{3}{4}$$

Alternativ: $p(A,C) = (A|C) \cdot p(C) = p(C|A)p(A) \Rightarrow p_{C|A} = \frac{p(A|C) \cdot p(c)}{p(A)}$

$$\Rightarrow I(C;S|A) = \tfrac{1}{4}H(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}) + \tfrac{3}{4}H(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}) = H(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4})$$

7. $I(A,C;B|S) = H(B|S) - H(B|S,A,C) = H(B|S) = H(A|S) = \frac{5}{8}H(\frac{1}{10}, \frac{9}{10})$

8a. $A \to B \to C$ ist kein MK da C noch von A abhängt

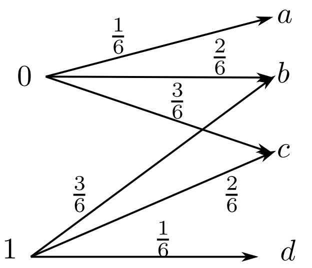
8b. $A \to S \to C$ Mk

8c. $B \to C \to S$ ist kein MK

8d. $S \to A \to C$ ist kein MK

Lösung Aufgabe B

3. zunächst kein $x = 2$ ignoiert werden, weil es von $x = 2$ nicht unterscheidbar ist



Aufgrund der Symmetrie des Übergangswahrscheinlichkeiten $p(y|x)$ und der Konkavität der Transinformation bei festem $p(y|x)$ folgt die Optimalität der Gleichverteilung
$\Rightarrow C = H(y) - H(y|x) = H(\frac{1}{12}, \frac{1}{2}(\frac{2}{6} + \frac{3}{6}), \frac{1}{2}(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}), \frac{1}{12}) - H(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6})$

2. $I(x_1; y|x_2) + I(x_2; y|x_1) \geq I(x_1, x_2; y)$
folgt aus
$I(x_1, x_2; y) = I(x_1; y) + I(x_2; y|x_1) \leq I(x_1; y|x_2) + I(x_2; y|x_1)$
da x_1 und x_2 unabhängig sind und die Transformation bei Bedinungen an unabh. Variablen steigt.

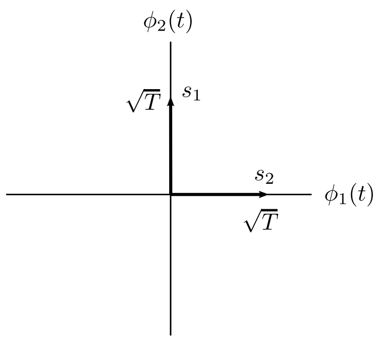
1. Der Kanal kann äquivalent als
$y = x \quad \forall z$ formuliert werden mit $x \in \{-2, 0, +2\} \Rightarrow y \in \{-3, -1, 1, +3\}$
$\Rightarrow C = \max\limits_{p_X} I(X;Y) = \max\limits_{p_X} H(Y) - H(Y|X) = \max\limits_{p_X} H(Y) - H(Z) = \max\limits_{p_X} H(Y) - 1 = 2 - 1$
$= 1$ bit/kanalbenutzung
Kann erreicht werden, in den x nur die Werte $-2, +2$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Dies wird nur erreicht, wenn x_1 und x_2 nicht unabhängig voneinander gewählt werden.

Lösung Aufgabe C

C1) $\Rightarrow$

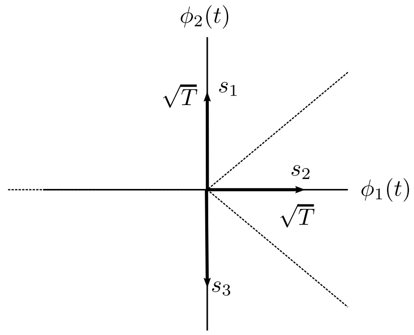
$$\phi_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$\phi_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{T}} & \frac{T}{2} < t \leq T \\ 0 & sonst \end{cases}$$

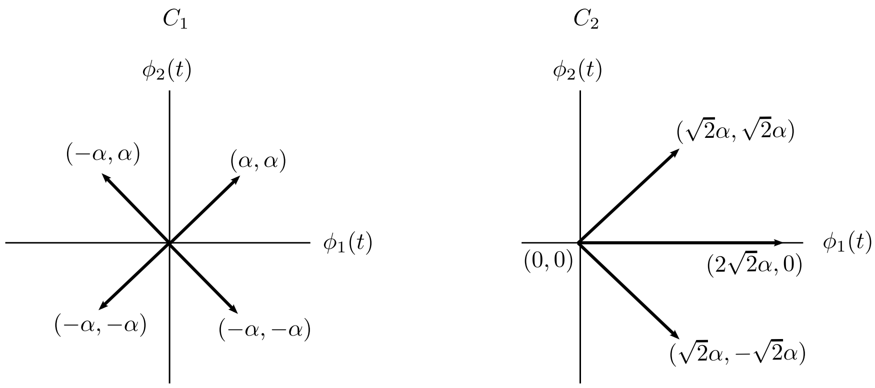


iii A: $s_3 = -s_1$ kein Einfluss $\Rightarrow$ Dimension der Signal-Rames $= 2$

iii B: Entscheidungsregionen



C2) Konstellationen C1 und C2



i) $p_i = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$

$$E_{C1} = \frac{1}{4} \sum_{i=1} s_i^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \alpha^2 = 2\alpha^2$$

$$E_{C2} = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 4\alpha^2 + \frac{1}{4} \cdot 4\alpha^2 + \frac{1}{4} \cdot 8\alpha^2 = \alpha^2 + \alpha^2 + 2\alpha^2 = 4\alpha^2$$

ii) $E_{C1}(p) = p(2\alpha^2) + \frac{1}{3}(1-p) \cdot (2\alpha^2) \cdot 3 = 2\alpha^2(p + 1 - p) = 2\alpha^2$

$$E_{C2}(p) = p \cdot 0 + \frac{1}{3}(1-p)4\alpha^2 \cdot 2 + \frac{1}{3}(1-p)8\alpha^2 = 8\alpha^2 \left(\frac{1}{3}(1-p) + \frac{1}{3}(1-p)\right) = 8\alpha^2 \left(\frac{2}{3}(1-p)\right)$$

$$\Rightarrow 8 \cdot \alpha^2 \frac{2}{3}(1-p) < 2\alpha^2$$

$$\frac{8}{3}(1-p) < 1$$

$$\Rightarrow p^* > 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Lösung Aufgabe D

$$C = \max_{p_X} I(x;y) = \max_{p_X} H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(Y|X) = H(Z|X) = H(Z) = \log 3$$

$$\Rightarrow C = \max_{p_X} H(Y) - \log 3 \leq \log 11 - \log 3$$

Achievable by uniform distrubution of x, i.e. $p(x = i) = \frac{1}{11}, \qquad i = 0, 1, ..., 10$