Aufgabe A (25 P)

$X \in \mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $Y \in \mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ sind diskrete Zufallsvariablen, die reelle Werte x_i, $y_j \in \mathbb{R}$ annehmen und der Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(X,Y)$ folgen. Sei $H_D(X)$ die Entropie von X und $I_D(X;Y)$ die Transinformation zwischen X, Y berechnet in Einheiten zur Basis D ($\log_D(\cdot)$).
Hinweis: Alle Fragen sind unabhängig voneinander zu beantworten.

1. Betrachten Sie das Verhaeltnis zwischen $2^{H_2(X)}$ und $3^{H_3(X)}$. Geben Sie (ohne Beweis) an, ob eines der Terme im Allgemeinen groesser ist als der andere, ob die Terme immer gleich sind, oder ob das Verhaeltnis von der spezifischen Wahrscheinlichkeitsverteilung abhaengt.

2. Zeigen Sie (ohne Beweis), das Verhaeltnis zwischen $2^{I_2(X;Y)}$und $3^{I_3(X;Y)}$.

3. Zeigen Sie (ohne Beweis), das Verhaeltnis zwischen $3^{H_2(X)}$und $2^{H_3(X)}$.

4. Es sei $H_3(X) = 2$. Geben Sie die kleineste Kardinalitaet $|\mathcal{X}|$, also den kleinsten Wert von m an, fuer den das zutreffen kann.

5. Es sei $I_2(X;Y) = 1$. Geben Sie die kleineste Kardinalitaet $|\mathcal{X}|+|\mathcal{Y}|$, also den kleinsten Wert von $m+n$ an, fuer den das zutreffen kann.

6. Es sei $H_3(X) = 2$ und $I_2(X;Y) = 1$. Geben Sie die kleineste Kardinalitaet $|\mathcal{X}|+|\mathcal{Y}|$, also den kleinsten Wert von $m+n$ an, fuer den das zutreffen kann.

Aufgabe B (25 P)

Die Teilaufgaben 1 und 2 sind unabhaengig voneinander.

1. Gegeben sei eine gedaechtnislose Quelle, die als Zufallsvariable $X \in \mathcal{X} = \{1, 2, \ldots, 6\}$ modelliert wird. Die Wahrscheinlichkeit $P(X = i) = \frac{i}{21}$.

   (a) Bestimmen Sie den Huffman-Code fuer diese Quelle, wobei die Quellen-Symbole einzeln encodiert und ein ternaeres (Basis 3) Alphabet benutzt werden soll.

   (b) Was ist die mittlere Codeword-Laenge pro Quellen-Symbol?

   (c) Bestimmen Sie fuer diese Quelle auch den ternaeren Shannon-Code (Quellen-Symbole werden einzeln encodiert). Geben Sie nicht nur die Codeword-Laenge, sondern auch die Codeword-Zuweisung an, so dass kein Codeword ein Prefix eines anderen Codewortes ist.

   (d) Was ist die mittlere Codeword-Laenge pro Quellen-Symbol fuer den Shannon-Code?

2. Eine Quelle X erzeugt Symbole, die die Werte $1, 2, 3, 4$ mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4$ annehmen kann.

   (a) Erstellen Sie einen binaeren Huffman-Code, so dass sich eine Codeword-Laenge von $l_1 = 1$ fuer das Symbol $X = 1$ ergibt.

   (b) Die Quellensymbole werden einzeln encodiert. Die mittlere Codewortlänge pro Quellensymbol sei $\bar{L} = 2$. Es sei $p_2 = 1/5$. Bestimmen Sie den kleinsten Wert fuer p_1, welcher garantiert, dass ein binärer Huffman-Code mit einer Codeword-Länge von $l_1 = 1$ fuer das Symbol $X = 1$ existiert.

Aufgabe C (25 P)

Gegeben seien die binaeren Zufallsvariablen $X, Y \in \{0,1\}$ mit der folgenden Verbundwahrscheinlichkeit

$$\begin{array}{ll} P_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{4} & P_{X,Y}(0,1) = \frac{1}{2} \\ P_{X,Y}(1,0) = 0 & P_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{4} \end{array} .$$

Wir haben die folgenden typischen Mengen

$$A_\epsilon^n(X) = \left\{ (x_1 x_2 \cdots x_n) \text{ mit } \left| -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log P_X(x_i) - H(X) \right| \le \epsilon \right\}$$

$$A_\epsilon^n(Y) = \left\{ (y_1 y_2 \cdots y_n) \text{ mit } \left| -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log P_Y(y_i) - H(Y) \right| \le \epsilon \right\}$$

$$\begin{aligned} A_\epsilon^n(X,Y) = \Big\{ & (x_1 x_2 \cdots x_n, y_1 y_2 \cdots y_n) \text{ mit} \\ & (x_1 x_2 \cdots x_n) \in A_\epsilon^n(X), \\ & (y_1 y_2 \cdots y_n) \in A_\epsilon^n(Y), \\ & \left| -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \log P_{X,Y}(x_i, y_j) - H(X,Y) \right| \le \epsilon \Big\} \end{aligned}$$

Die Zufallsvariablen X_i sind unabhaengig identisch verteilt, mit $X_i \sim P(X)$.
Die Zufallsvariablen Y_i sind unabhaengig identisch verteilt, mit $Y_i \sim P(Y)$.
Es sei $n = 4$, $\epsilon = 0$. Bei der Beantwortung der folgenden Aufgaben sei zu beachten, dass exakte Antworten notwendig sind (da $n = 4$) und keine asymptotische Betrachtung erfolgen soll.

1. Bestimmen Sie die Mengen $A_0^4(X), A_0^4(Y)$
2. Zeigen Sie ob die folgenden Sequenzen (x, y) Elemente in $A_0^4(X,Y)$ sind: $(0001, 1101)$, $(0001, 1110)$
3. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sequenz

   $$X_1 X_2 X_3 X_4$$

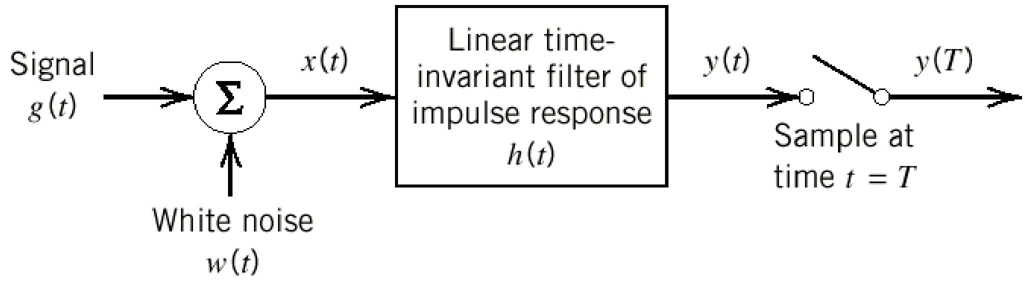
   zu der typischen Menge $A_0^4(X)$ gehoert.
4. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sequenz

   $$X_1 X_1 X_2 X_3$$

   zu der typischen Menge $A_0^4(X)$gehoert.
5. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sequenz $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$ zu der typischen Menge $A_0^4(X)$ gehoert. Anmerkung: Wir wollen die Wahrscheinlichkeit, dass eine Y-Sequenz wie eine typische X-Sequenz aussieht.

Aufgabe D (25 P)

Gegeben sei das folgende System



Es sei

$$g(t) = \sum_{i=1}^{K} g_i \psi_i(t), \text{ mit } g_i = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, \psi_i(t)\, dt,$$

wobei $\{\psi_i(t)\}_{i=1}^K$ orthonormale Basisfunktionen darstellen. Die Funktionen sind alle reellwertig. Analog gilt fuer

$$x(t) = \sum_{i=1}^{K} x_i \psi_i(t),$$
$$y(t) = \sum_{i=1}^{K} y_i \psi_i(t).$$

1. Zeigen Sie, dass y_i wie folgt dargestellt werden kann:

   $$y_i = \sum_{j=1}^{K} x_j h_{j,i}.$$

   Wie ist $h_{j,i}$ definiert?

2. Leiten Sie fuer $y(T)$ den funktionellen Zusammenhang (in Vektor-Form) zur Filterantwort $h_{j,i}$, den Basisfunktionen $\{\psi_i(t)\}_{i=1}^K$ und den Groessen x_i her.

3. Nehmen Sie an, dass gilt: $y(T) = \mathbf{h}^T \mathbf{x}$.
   Die Elemente des Vektors $\mathbf{x}$ ergeben sich aus den Eingangsgroessen x_i und die Elemente des Vektors $\mathbf{h}$ ergeben sich aus der Impulsantwort des Filters. Das Rauschen $w(t)$ ist mittelwertfrei und hat die Leistung $N_0/2$. Berechnen Sie die Signalleistung und die mittlere Rauschleistung nach der Filterung. Zeigen Sie dann mit Hilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung, wie $\mathbf{h}$ gewaehlt werden muss, so dass die Signalleistung maximiert wird.

Aufgabe E (25 P)

Gegeben sind die folgenden 4 Signale

$$s_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le \frac{T}{3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le \frac{2T}{3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_3(t) = \begin{cases} 1 & \frac{T}{3} \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_4(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Zeichnen Sie die Signalverläufe.
2. Bestimmen Sie fuer diese Signale eine orthonormale Basis.
3. Zeichnen Sie die Verläufe der Basisfunktionen.
4. Konstruieren Sie das dazugehoerige Signal-Raum Diagramm.

Hinweis: Geben Sie die Achsenbeschriftung an!

Aufgabe F (25 P)

Gegeben ist der folgende binaere Kommunikationskanal

$$Y = (X + Z) \mod 2 = X \oplus Z$$

Das Sendesignal $X \sim Bern(p), 0 \leq p \leq 1$ (d.h. $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$), und das Rauschen $Z \sim Bern(\epsilon), 0 \leq \epsilon \leq 0.5$ sind unabhaengig.

1. Berechnen Sie die Uebergangswahrscheinlichkeiten fuer diesen binaere Kommunikationskanal. Nutzen Sie dabei die Unabhaegigkeit zwischen Signal und Rauschen aus.

2. Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit $P\{X \neq Y\}$.

3. Betrachten Sie den Fall $\epsilon = 0.5$. Wie wirkt sich dies auf die Fehlerwahrscheinlichkeit aus und was bedeutet dies fuer die Uebertragung. Nennen Sie eine Anwendung, bei der solch ein Resultat sehr nuetzlich ist.