Ruhr Universität Bochum
Nachrichtentechnik
Wintersemester 2012/2013
Prüfung
19.02.2013
Zeit: 120 Minuten

Name : ____________________
Matrikelnummer : ____________________

---

1. (30 %)

   Gegeben ist folgender diskreter Kanal mit ZV $X \in \{0, 1, 2\}$ am Sender und $Y \in \{0, 1, 2\}$ am Empfänger.

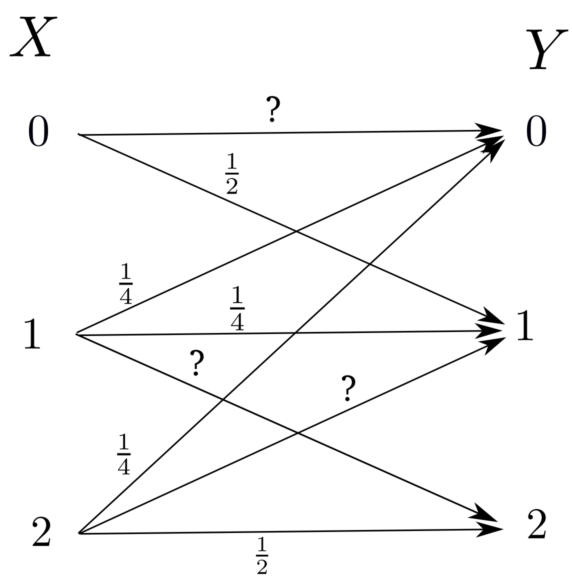

Abbildung 1

   Nehmen Sie an, dass

$$
\begin{aligned}
P(X = 0) &= \alpha \\
P(X = 1) &= \beta \\
P(X = 2) &= \gamma.
\end{aligned}
$$

   gilt.

   (a) Berechnen Sie die bedingte Entropie $H(Y|X)$ als Funktion von α, β und γ. Für welches (α, β, γ) wird $H(Y|X)$ maximiert?

   (b) Berechnen Sie die Entropie $H(Y)$ als Funktion von α, β und γ.

   (c) Bestimmen Sie die Eingangswahrscheinlichkeitsverteilung (α, β, γ), die zur Kanalkapazität führt.

2. (20 %)

In der Abbildung 2 ist eine 3-Punkt-Signalkonstellation dargestellt. Nehmen Sie an, dass alle drei Signalpunkte mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gesendet werden.

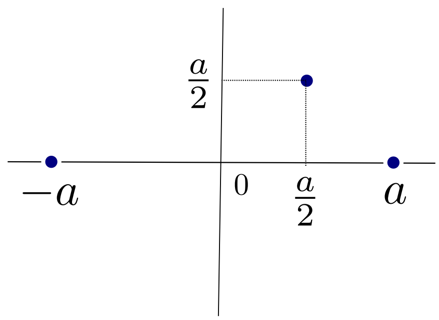

Abbildung 2

(a) Zeichnen Sie die Entscheidungsregionen der dargestellten Konstellation mit Angabe markanter Punkte (Schnittpunkte mit Koordinatenkreuz).

(b) Bestimmen Sie die Union-Bound der mittleren Fehlerwahrscheinlichkeit. Nehmen Sie an, dass die Varianz des Rauschens (AWGN) am Empfänger $\frac{N_0}{2}$ ist. Benutzen Sie dazu den Ausdruck $\frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{d_{ik}}{2\sqrt{N_9}}\right)$.

3. (20 %)

Ein Sender sendet vier Signalformen $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$ und $s_4(t)$, die in der Abbildung 3 gezeigt sind.

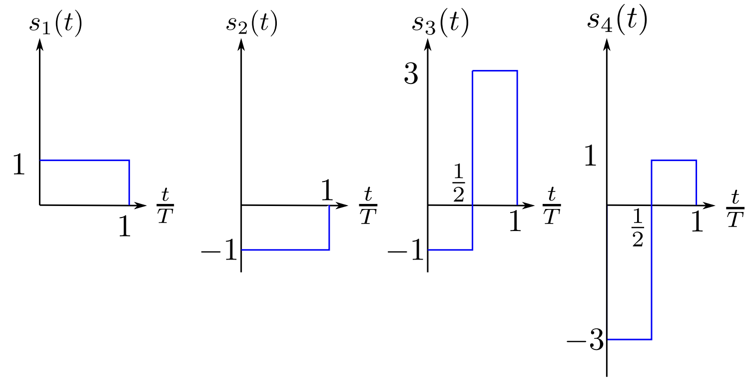

Abbildung 3

(a) Bestimmen und zeichnen Sie orthonormale Basisfunktionen aus den vier Signalformen. Hinweis: Geben Sie die Achsenbeschriftung an!

(b) Bestimmen Sie die Signalvektoren, die den Signalen $s_i(t)$, $i = 1, \ldots, 4$ im euklidischen Vektorraum entsprechen. Zeichnen Sie die Signalraumkonstellation.

(c) Der Sender sendet diese vier Signale mit der gleichen Wahrscheinlichkeit über einen AWGN Kanal. Nehmen Sie an, dass das empfangene Signal verrauscht ist. Ändern Sie die 4-Punkt-Signalkonstellation von Teil (c) so, dass die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit konstant bleibt, aber die mittlere Energie minimal wird. Begründen Sie Ihre Antwort qualitativ.

4. (30 %)

   Eine Informationsquelle erzeugt die Werte $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit den jeweiligen Auftrittswahrscheinlichkeiten $\{\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{4}{27}, \frac{2}{27}\}$.

   Hinweis: Nutzen Sie die Funktion $H(P_1, P_2, P_3, \ldots . P_N)$, um die Endergebnisse zu formulieren, wobei $H(P_1, P_2, P_3, \ldots . P_N) = \sum_{i=1}^{N} P_i \log_2 \frac{1}{P_i}$.

   (a) Die Informationsquelle soll zunächt verlustfrei codiert werden. Geben Sie die mittlere Codewort-Länge bei Verwendung eines Shannon-Codes an.

   (b) Wie kann man diese mittlere Codewort-Länge reduzieren? Was ist die untere Schranke für die mittlere Codewort-Länge?

   (c) Zeigen Sie, ob ein präfixfreier Code mit der selben Codewort-Länge wie in Teilaufgabe (a) existiert.

   (d) Bestimmen Sie einen 4-nären Hoffman-Code für die verwendete Quelle.

   (e) Die Informationsquelle wird nun mit folgender Codiervorschrift verlustbehaftet codiert:

   $$\hat{X} = -\left| X - \frac{7}{2} \right| + \frac{7}{2}.$$

   Berechnen Sie die mittlere Hamming-Distanz $E[d_H(x, \hat{x})]$.

   (f) Berechnen Sie die Transinformation $I(X; \hat{X})$.