Ruhr-Universität Bochum
Bachelor ETIT: Nachrichtentechnik
SS 2012
Dienstag, den 21.08.2012, 14.30-16.30 Uhr, Raum HNB, HNC 10

Name:

- Sie haben 2 Stunden fuer die Prüfung.
- Zur Prüfung zugelassen sind alle Unterlagen.
  - Ausnahmen: Lösungen von Aufgaben (Quiz, Solutions Manual etc.)
- Jegliche elektronische Mittel (Taschenrechner, Computer, Telefone etc.) sind nicht erlaubt.
- Antworten mit unzureichender Begründung werden sehr wenige Punkte erhalten.

Erreichte Punkte:

1. ______ (30 Punkte)
2. ______ (20 Punkte)
3. ______ (30 Punkte)
4. ______ (20 Punkte)
5. ______ Punkte aus den Quiz-Fragen

Ingesamt:_________ (100 Punkte)

Aufgabe A (30 %)

A, B sind unabhängig verteilte binäre Zufallsvariablen, die die Werte $0, 1$ annehmen können. Es gilt

$$P(A = 0) = P(B = 1) = 1/4,$$

wobei $S = A + B$ die Werte $0, 1, 2$ und $C = |S - 1|$ die Werte $0, 1$ annimmt.

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Hierbei reicht es aus, wenn Sie die Antworten in Entropie-Funktionen $H(p_1, p_2, \cdots, p_m)$ ausdrücken, wobei die Verteilungen p_i explizit berechnet werden müssen.

1. $H(A, B, C, S)$
2. $H(A, C|S)$
3. $I(A; B)$, $I(C; B)$, $I(A; C)$
4. Zeigen Sie für die folgenden Ausdrücke, ob es sich jeweils um eine Markov-Kette handelt
   (a) $A \to B \to C$
   (b) $A \to S \to C$
   (c) $B \to C \to S$
   (d) $S \to A \to C$

Aufgabe B (20 %)

1. Gegeben sei der folgende Übertragungskanal

$$Y = X_1 + X_2 + Z$$

   Die Variablen X_1, X_2, Z seien binär mit den Werten $\{+1, -1\}$. Der Sender kann wählen, welche Werte von X_1, X_2 bei einer Kanalbenutzung übertragen werden sollen. Das Rauschen Z ist unabhängig von X_1, X_2 und ist gleichmässig verteilt, d.h. $P_Z(+1) = P_Z(-1) = \frac{1}{2}$.

   Anmerkung: X_1, X_2 müssen nicht voneinander unabhängig sein.

   Bestimmen Sie die optimale Eingangsverteilung $P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ und die Kapazität dieses Kanals.

Aufgabe C (30 %)

Die Teilaufgaben 1. und 2. sind unabhängig voneinander lösbar.

1. Gegeben sind die folgenden 2 Signale

$$s_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -1 & \frac{T}{2} < t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   (a) Bestimmen Sie die Orthonormalbasis

   (b) Stellen Sie das Signal-Raum Diagramm dar.

   (c) Nun wird ein weiteres Signal hinzugefuegt mit $s_3(t) = -s_1(t)$.

      i. Wie wirkt sich dies auf die Dimension des Signal-Raumes aus? Bestimmen Sie nun die Orthonormalbasis.

      ii. Stellen Sie das Signal-Raum Diagramm dar.

      iii. Leiten Sie die Entscheidungsregionen R_1, R_2, R_3 her und zeichnen Sie diese in das Diagramm. Nehmen Sie dabei an, dass alle Signale gleichwahrscheinlich sind.

2. Gegeben sind die folgenden Konstellationen

$$C_1 = \{(\alpha, \alpha), (-\alpha, \alpha), (\alpha, -\alpha), (-\alpha, -\alpha)\}$$
$$C_2 = \left\{(0,0), \left(\sqrt{2}\alpha, -\sqrt{2}\alpha\right), \left(\sqrt{2}\alpha, \sqrt{2}\alpha\right), \left(2\sqrt{2}\alpha, 0\right)\right\}$$

   (a) Nehmen Sie an, dass die Signalpunkte gleichwahrscheinlich sind. Zeigen Sie, welches der beiden Konstellationen eine niedrigere mittlere Energie hat.

   (b) Nehmen Sie nun an, dass die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Konstellationspunkte entsprechend ihrer Reihenfolge wie folgt gegeben sind:

$$p, {}^{1}\!/_{3}(1-p), {}^{1}\!/_{3}(1-p), {}^{1}\!/_{3}(1-p)$$

   Bestimmen Sie das Intervall der Auftrittswahrscheinlichkeiten p , in dem sich das Resultat in der vorherigen Aufgabe ändert.

Aufgabe D (20 %)

Gegeben ist der folgende Kommunikationskanal

$$Y = (X + Z) \mod 11,$$

wobei das Rauschen Z unabhängig vom Sendesignal $X \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ und wie folgt verteilt ist

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/3 \\ 2 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/3 \\ 3 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/3 \end{cases}.$$

1. Bestimmen Sie die Kapazität.

2. Was ist die optimale Verteilung $p^*(x)$?