Ruhr Universität Bochum
Wintersemester 2012/2013
Lösung
Nachrichtentechnik
19.02.2013
Time Limit: 120 Minutes

---

1. (a) Mit $\sum_{y=0}^{2} P(Y = y|X = \text{const.}) = 1$ folgt

$$\begin{aligned}
P(Y = 0|X = 0) &= 1 - P(Y = 1|X = 0) \\
P(Y = 0|X = 0) &= \frac{1}{2} \qquad (1) \\
P(Y = 2|X = 1) &= 1 - [P(Y = 1|X = 1) + P(Y = 0|X = 1)] \\
P(Y = 2|X = 1) &= \frac{1}{2} \qquad (2) \\
P(Y = 1|X = 2) &= 1 - [P(Y = 0|X = 2) + P(Y = 2|X = 2)] \\
P(Y = 1|X = 2) &= \frac{1}{4} \qquad (3)
\end{aligned}$$

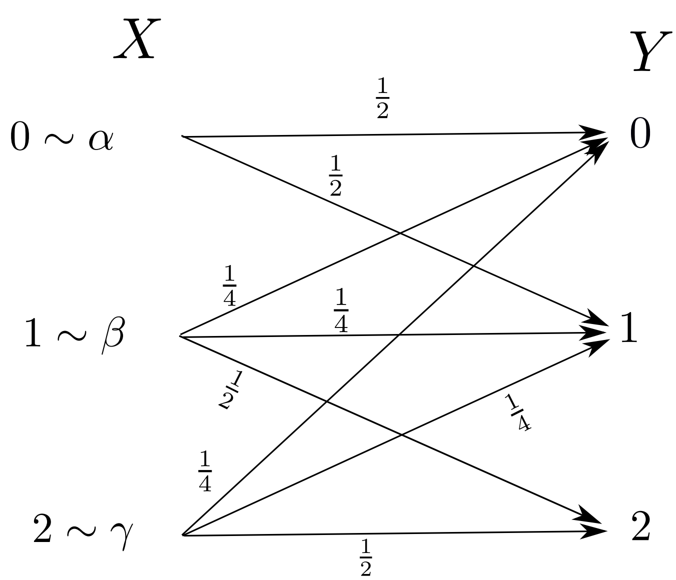

Abbildung 1

Mit

$$H(Y|X = x) = \sum_{y=0}^{2} P(Y = y|X = x) \log \frac{1}{P(Y = y|X = x)}$$

folgt

$$\begin{aligned} H(Y|X=0) &= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log 2 \\ &= 1 \qquad (4) \\ H(Y|X=1) &= \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{2}\log 2 \\ &= \frac{3}{2} \qquad (5) \\ H(Y|X=2) &= \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{2}\log 2 \\ &= \frac{3}{2} \qquad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \sum_{x=0}^{2} P(X=x)H(Y|X=x) \\ &= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot \frac{3}{2} + \gamma \cdot \frac{3}{2} \\ &= \alpha + \frac{3}{2}(\beta+\gamma) \qquad (7) \end{aligned}$$

Es sei $S = \beta + \gamma$. Mit $S = 1 - \alpha$ folgt

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \alpha + \frac{3}{2}(1-\alpha) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha \end{aligned}$$

Da die Funktion $H(Y|X)$ eine monoton fallende Funktion mit α darstellt, ist das Maximum von $H(Y|X)$ erreicht, wenn α minimal ist. Daher folgt $\alpha = 0$ und $\beta + \gamma = 1$. Somit erhalten wir im Maximum $H(Y|X) = \frac{3}{2}$.

(b) Mit $P(Y=y) = \sum_{x=0}^{2} P(Y=y|X=x)$ gilt:

$$P(Y=0) = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{4}\gamma \qquad (8)$$

$$P(Y=1) = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{4}\gamma \qquad (9)$$

$$P(Y=2) = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma \qquad (10)$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} H(Y) &= \sum_{y=0}^{2} P(Y=y)\log\frac{1}{P(Y=y)} \\ &= -2\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}(\beta+\gamma)\right)\log\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}(\beta+\gamma)\right) - \left(\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma\right)\log\left(\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma\right) \end{aligned}$$

(c)

$$C = \max_{P_X(x)} \quad I(X;Y) \tag{11}$$

Aufgrund der Symmetrie des Kanals hinsichtlich der Eingänge $X = 1$ und $X = 2$ hat nur die Summe der Auftrittswahrscheinlichkeiten von $X = 1$ und $X = 2$ Einfluss auf die Transinformation $I(X;Y)$. Somit können wir auch $\gamma = \beta$ annehmen.

$$\gamma = \beta = \frac{1-\alpha}{2} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} H(Y)|_{\gamma=\beta} &= \frac{1}{2}(\alpha+1)\log\frac{4}{\alpha+1} + \frac{1-\alpha}{2}\log\frac{2}{1-\alpha} \\ H(Y|X)|_{\gamma=\beta} &= -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2} \end{aligned} \tag{13}$$

Da die Transinformation eine konkave Funktion hinsichtlich P_X mit festen $P_{Y|X}$ darstellt läst sich mit

$$\frac{d}{d\alpha}I(X;Y) = \frac{d}{d\alpha}H(Y) - \frac{d}{d\alpha}H(Y|X) \overset{!}{=} 0 \tag{14}$$

das Maximum bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}H(Y) &= \frac{1}{2}\log\frac{4}{\alpha+1} + \underbrace{\frac{1}{2}(\alpha+1)\frac{\alpha+1}{4}\frac{-4}{(\alpha+1)^2}\frac{1}{\ln 2}}_{-\frac{1}{2\ln 2}} \\ &\quad + \frac{-1}{2}\log\frac{2}{1-\alpha} + \underbrace{\frac{1-\alpha}{2}\frac{1-\alpha}{2}\frac{2}{(1-\alpha)^2}\frac{1}{\ln 2}}_{\frac{1}{2\ln 2}} \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{4}{\alpha+1} - \frac{1}{2}\log\frac{2}{1-\alpha} \end{aligned} \tag{15}$$

Weiterhin folgt

$$\frac{d}{d\alpha}H(Y|X) = \frac{-1}{2} \tag{16}$$

Es folgt

$$\frac{d}{d\alpha}I(X;Y) = \frac{1}{2}\log\frac{4}{\alpha+1} - \frac{1}{2}\log\frac{2}{1-\alpha} + \frac{1}{2} \overset{!}{=} 0 \tag{17}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log\left(\frac{\frac{4}{\alpha+1}}{\frac{2}{1-\alpha}}\right) &\stackrel{!}{=} -\frac{1}{2} \\
\log\left(\frac{2(1-\alpha)}{1+\alpha}\right) &\stackrel{!}{=} -1 \\
\frac{2(1-\alpha)}{1+\alpha} &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \\
\alpha_{opt} &= \frac{3}{5} \\
\beta_{opt} + \gamma_{opt} &= \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

Eine mögliche Loesung ist daher $\beta_{opt} = \gamma_{opt} = \frac{1}{5}$.

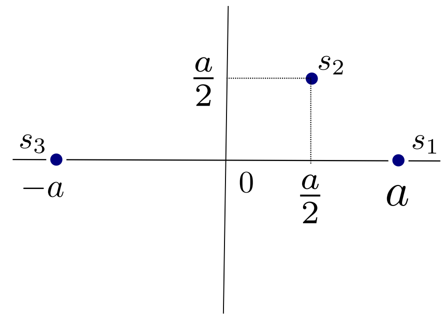

Abbildung 2

2. (a) Abbildung 3

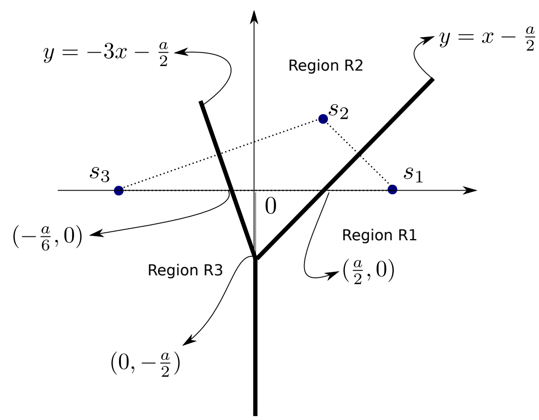

Abbildung 3

(b)

$$\bar{P}_e \leq \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{3} p(A_{i,k})}_{P_e(s_i)} p(s_i),$$

wobei für AWGN mit der Varianz $\frac{N_0}{2}$, $P(A_{i,k}) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{d_{i,k}}{2\sqrt{N_0}}\right)$

Da $d_{i,k} = d_{k,i}$, die Distanzen zwischen den Signalpunkte ergeben sich wie folgt

$$P(A_{1,2}) = P(A_{2,1}) \tag{18}$$
$$P(A_{1,3}) = P(A_{3,1}) \tag{19}$$
$$P(A_{2,3}) = P(A_{3,2}) \tag{20}$$
$$\tag{21}$$

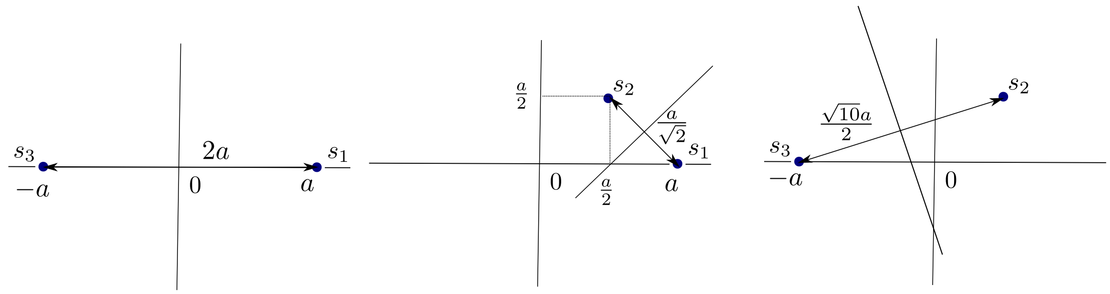

Abbildung 4

$$d_{1,2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \tag{22}$$

$$d_{1,3} = 2a \tag{23}$$

$$d_{2,3} = \frac{\sqrt{10}a}{2} \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

Erhalten wir

$$P(A_{1,2}) = P(A_{2,1}) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{2N_0}}\right)$$
$$P(A_{1,3}) = P(A_{3,1}) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{N_0}}\right)$$
$$P(A_{2,3}) = P(A_{3,1}) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{\sqrt{10}a}{4\sqrt{N_0}}\right)$$

Mit $p(s_1) = p(s_2) = p(s_3) = \frac{1}{3}$ gilt

$$\begin{aligned}\bar{P}_e &\leq \frac{1}{3}[P(A_{1,2}) + P(A_{1,3}) + P(A_{2,1}) + P(A_{2,3}) + P(A_{3,1}) + P(A_{3,2})] \\ &= \frac{1}{3}\left[\text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{2N_0}}\right) + \text{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{N_0}}\right) + \text{erfc}\left(\frac{\sqrt{10}a}{4\sqrt{N_0}}\right)\right]\end{aligned} \tag{26}$$

3. (a) Es gilt

$$\phi_i(t) = \frac{g_i(t)}{\sqrt{\int_0^T |g_i(t)|^2 dt}}$$
$$g_i(t) = s_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} c_{i,j}\phi_j(t)$$
$$c_{i,j} = \int_0^T s_i(t)\phi_j(t)dt$$

Somit folgt für $i = 1$

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\int_0^T |s_i(t)|^2 dt}} = \frac{s_1(t)}{\sqrt{T}}$$

Die Funktion $\phi_1(t)$ ist in Abbildung 5 dargestellt

$$c_{1,1} = \int_0^T s_1(t)\phi_1(t)dt = \sqrt{T}$$

Weiterhin folgt

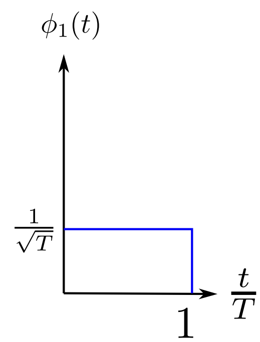

Abbildung 5

$$c_{2,1} = \int_0^T s_2(t)\phi_1(t)dt = -\sqrt{T}$$
$$g_2(t) = 0$$

Weiterhin folgt

$$c_{3,1} = \int_0^T s_3(t)\phi_1(t)dt = \sqrt{T}$$

Für das in Abbildung 6 ermittelte $g_3(t)$ gilt:

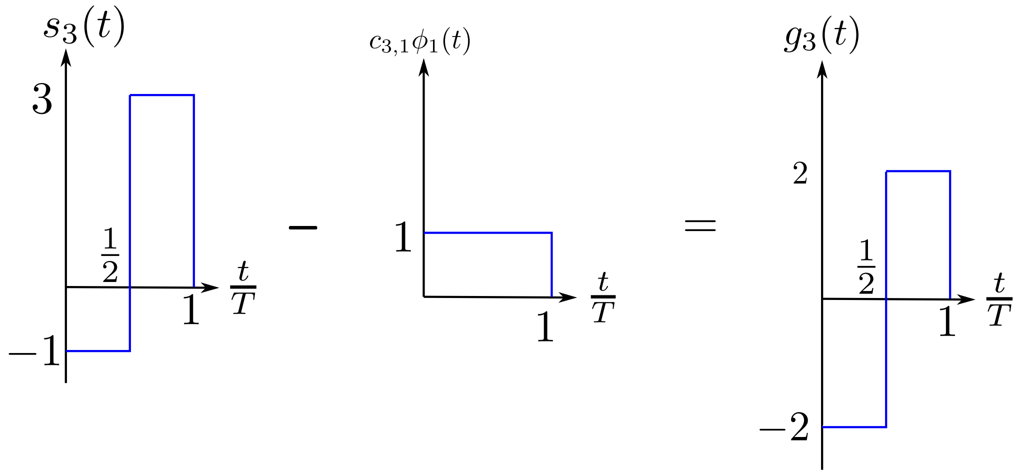

Abbildung 6

$$\begin{aligned} \|g_3(t)\| &= \sqrt{\int_0^T |g_3(t)|^2 dt} = 2\sqrt{T} \\ \phi_2(t) &= \frac{g_3(t)}{2\sqrt{T}} \end{aligned} \tag{27}$$

$\phi_2(t)$ ist in Abbildung 7 dargestellt.

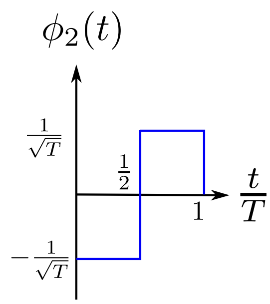

Abbildung 7

$$c_{3,2} = \int_0^T s_3(t)\phi_2(t)dt = 2\sqrt{T}$$

$$\begin{aligned} c_{4,1} &= \int_0^T s_4(t)\phi_1(t)dt = -\sqrt{T} \\ c_{4,2} &= \int_0^T s_4(t)\phi_2(t)dt = 2\sqrt{T} \\ g_4(t) &= 0 \end{aligned}$$

(b) Da $s_1(t)$ und $s_2(t)$ kollinear zu $\phi_1(t)$ sind (und damit orthogonal zu $\phi_2(t)$), folgt $c_{1,2} = c_{2,2} = 0$.

Somit erhalten wir $\boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{T} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{T} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{s}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{T} \\ 2\sqrt{T} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{s}_4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{T} \\ 2\sqrt{T} \end{pmatrix}$

Abbildung 8

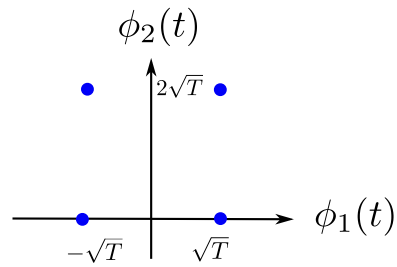

Abbildung 8

(c) Eine Verschiebung ändert nicht die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit. Wir verschieben die Signalraumkonstellation so, dass es punktsymmetrisch ist. Die euklidische Distanz zwischen Signalpunkten soll jeweils gleich bleiben. Die Signalenergie wird minimal, wenn die Signale mittelwertsfrei sind.

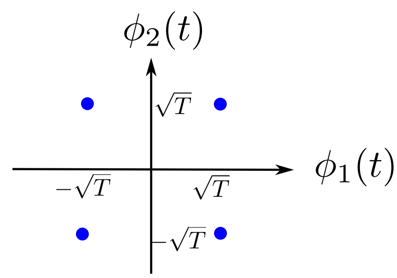

Abbildung 9

4. $X \in \{1,2,3,4,5,6\} \sim \{\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{4}{27}, \frac{2}{27}\}$

(a) Mit $l_i = \lceil \log \frac{1}{p_i} \rceil$
folgt
$l_1 = 4,\ l_2 = 3,\ l_3 = 2,\ l_4 = 4,\ l_5 = 3,\ l_6 = 4$

Daher
$\bar{L} = 4\frac{1}{9} + 3\frac{2}{9} + 2\frac{1}{3} + 4\frac{1}{9} + 3\frac{4}{27} + 4\frac{2}{27} = \frac{80}{27}$

(b) Durch Codierung längerer Sequenzen $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ kann man die mittlere Länge reduzieren. Es gilt

$$H(X) \leq \bar{L} \leq H(X) + \frac{1}{n} \tag{28}$$

Die untere Schranke ist $H(X) = H([\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{4}{27}, \frac{2}{27}])$.

(c)

$$\sum_{i=1}^{6} 2^{-l_i} \overset{!}{\leq} 1$$
$$\frac{11}{16} \leq 1 \tag{29}$$

Die Kraft-Ungleichung wird erfüllt. Daher existiert ein präfixfreie Code mit dieser Codewortlänge.

(d) Anzahl der Symbole $\overset{!}{=} (D-1)K + 1$

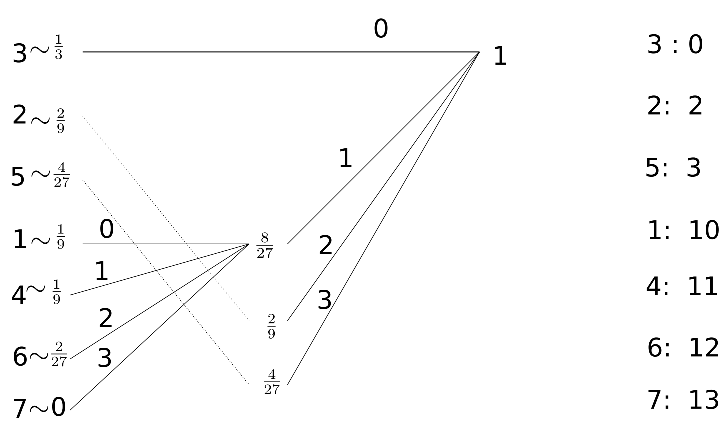

Abbildung 10

(e) Aus Abbildung 11 folgt
$d_H(1,1) = d_H(2,2) = d_H(3,3) = 0$
$d_H(6,1) = d_H(5,2) = d_H(4,3) = 1$

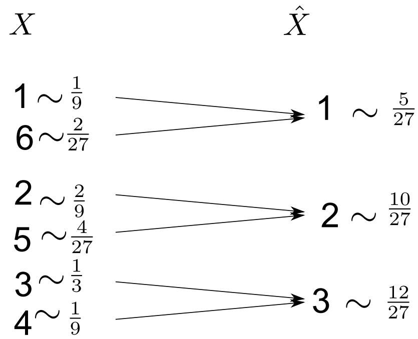

Abbildung 11

Somit gilt
Es folgt

$P(x,\hat{x})$	x=1	x=2	x=3	x=4	x=5	x=6
$\hat{x}=1$	$\frac{1}{9}$	0	0	0	0	$\frac{2}{27}$
$\hat{x}=2$	0	$\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{4}{27}$	0
$\hat{x}=3$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	0	0

$$\begin{aligned} E[d_H(x,\hat{x})] &= \sum P(x,\hat{x}) d_H(x,\hat{x}) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{4}{27} + \frac{2}{27} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{30}$$

(f)

$$\begin{aligned} I(X;\hat{X}) &= H(\hat{X}) - \underbrace{H(\hat{X}|X)}_{0} \\ &= H(\hat{X}) \\ &= H\left(\frac{5}{27}, \frac{10}{27}, \frac{12}{27}\right) \end{aligned} \tag{31}$$